Mathias forcing と ω の分割の性質

YasudaYasutomo

令和元年 5 月

Solovay モデルの中で ω が強い分割の性質を持っていることを Mathias forcing を用いて示す.

1 Mathias forcing

定義 1.1 (Mathias forcing)**.** $\mathbb{M}$ とは次を満たす組 $\langle s, A\rangle$ の集合である.

1. $s \in [\omega]^{<\omega}$
2. $A \in [\omega]^{\omega}$

$\mathbb{M}$ 上の順序 $\langle s, A\rangle \leq \langle t, b\rangle$ を次のように定義する.

1. $s \cap (\max(t) + 1) = t$
2. $A \cup (s - t) \subseteq B$

定義 1.2. G を $(V, \mathbb{M})$-generic とする. x_G を次のように定義する.

$$x_G = \bigcup\{s \mid \exists A(\langle s, A\rangle \in G)\} \subseteq \omega$$

実数 $x \subseteq \omega$ が V 上の Mathias real であるとは，ある $(V, \mathbb{M})$-generic G が存在して $x = x_G$ となるときのことをいう.

逆に V 上の Mathias real x が与えられたとき，$(V, \mathbb{M})$-generic G' を，

$$G' = \{\langle s, A\rangle \in \mathbb{M} \mid s \text{ は } x \text{ の始切片かつ } x \setminus s \subseteq A\}$$

と定義することにより $G = G'$ となる. ゆえに $V[x_G] = V[G]$ であることがわかる.

Mathias forcing は Prikry forcing に非常に似ている. Prikry forcing の性質の一つとして Prikry condition が成立することが挙げられるが，Mathias forcing についても同様のことが成立することをみる. 今後これを Mathias condition と呼ぶことにする.

定義 1.3. $\langle s, A\rangle \in \mathbb{M}$ に対して，$[s, A]^{\omega} := \{z \in [\omega]^{\omega} \mid s \subseteq z \subseteq A \cup (\max(s) + 1)\}$ と定義する.
$\mathbb{M}$ の開集合 $\mathcal{O}$ に対して，$\bar{\mathcal{O}} := \bigcup\{[s, A]^{\omega} \mid \langle s, A\rangle \in \mathcal{O}\}$ と定義する.

定義 1.4. $\mathbb{M}$ の開集合 $\mathcal{O}$ を任意に一つ固定する.

- $\langle s, A\rangle \in \mathbb{M}$ が $\mathcal{O}$ に対して *good* とは，ある $\langle s, B\rangle \leq \langle s, A\rangle$ が存在して $[s, B]^{\omega} \subseteq \bar{\mathcal{O}}$ となることをいう. そうでないとき *bad* という.

- $\langle s, A\rangle \in \mathbb{M}$ が $\mathcal{O}$ に対して *ugly* とは，すべての $a \in A$ において $\langle s \cup \{a\}, A \setminus (a+1)\rangle$ が $\mathcal{O}$ に対して *bad* であるときのことをいう．
- $\langle s, A\rangle \in \mathbb{M}$ が $\mathcal{O}$ に対して *completely ugly* とは，すべての $\{a_0, \ldots, a_n\} \subseteq A$ で $a_0 < \cdots < a_n$ を満たすものに対して $\langle s \cup \{a_0, \ldots, a_n\}, A \setminus (a_n+1)\rangle$ が *bad* であるときのことをいう．

補題 1.5. $\mathcal{O}$ を $\mathbb{M}$ の開集合とする．$\langle s, A\rangle \in \mathbb{M}$ が $\mathcal{O}$ に対して *bad* ならば，ある $\langle s, B\rangle \leq \langle s, A\rangle$ が存在して，$\langle s, B\rangle$ は $\mathcal{O}$ に対して *ugly* となる．

証明. 次のように $\langle s, B\rangle$ を構成する．$x_0 = A$ として，a_0 を x_0 の最小元とする．$x_1 \subseteq (x_0 \setminus (a_0+1))$ を $[s \cup \{a_0\}, x_1]^\omega \subseteq \bar{\mathcal{O}}$ となるものが存在すればそれを取る．存在しないとき $x_1 = (x_0 \setminus (a_0+1))$ とする．この操作を繰り返して $z = \{a_i \mid i \in \omega\} \in [\omega]^\omega$ を得る．$y = \{a_i \in z \mid [s \cup \{a_i\}, x_{i+1}]^\omega \subseteq \bar{\mathcal{O}}\}$ とする．このとき $y \in [\omega]^\omega$ または $z \setminus y \in [\omega]^\omega$ が成立する．$y \in [\omega]^\omega$ のとき，$[s, y]^\omega \subseteq \bar{\mathcal{O}}$ となり $\langle s, A\rangle \in \mathbb{M}$ が $\mathcal{O}$ に対して *bad* であることに矛盾．ゆえに $z \setminus y \in [\omega]^\omega$ となる．$B = z \setminus y$ として取れば，$\langle s, B\rangle \leq \langle s, A\rangle$ かつ $\langle s, B\rangle$ は $\mathcal{O}$ に対して *ugly* となる． □

補題 1.6. $\mathcal{O}$ を $\mathbb{M}$ の開集合とする．$\langle s, A\rangle \in \mathbb{M}$ が $\mathcal{O}$ に対して *ugly* ならば，ある $\langle s, B\rangle \leq \langle s, A\rangle$ が存在して，$\langle s, B\rangle$ は $\mathcal{O}$ に対して *completely ugly* となる．

証明. 同様に各 $n \in \omega$ に対して，任意の $t \subseteq \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ において，$\langle s \cup t, x_n\rangle$ が *ugly* または $[s \cup t, x_n]^\omega \subseteq \bar{\mathcal{O}}$ となるように x_n を取れる．$B = \{a_n \mid n \in \omega\}$ とすれば，$\langle s, B\rangle$ は取り方より *completely ugly* となる． □

定理 1.7 (Mathias condition)**.** φ を強制言語で書かれた文とする．このとき任意の $\langle s, A\rangle \in \mathbb{M}$ に対して，ある $B \in [A]^\omega$ が存在して $\langle s, B\rangle \parallel \varphi$ を満たす．

証明. 強制言語で書かれた文 φ と $\langle s, A\rangle \in \mathbb{M}$ を任意に取る．$Q_1 = \{q \in \mathbb{M} \mid q \Vdash \varphi\}$, $Q_2 = \{q \in \mathbb{M} \mid q \Vdash \neg\varphi\}$ とする．Q_1, Q_2 は開集合で，$Q_1 \cup Q_2$ は $\mathbb{M}$ の稠密な部分集合である．Q_1 について $\langle s, A\rangle$ が *good* のとき，ある $\langle s, B\rangle \leq \langle s, A\rangle$ が存在して $[s, B]^\omega \subseteq \bar{Q_1}$ となる．これは $\langle s, B\rangle \Vdash \varphi$ に他ならない．また Q_1 について $\langle s, A\rangle$ が *bad* のとき，ある $\langle s, B\rangle \leq \langle s, A\rangle$ が存在して，$\langle s, B\rangle$ は *completely ugly* となる．ゆえ $[s, B]^\omega \cap \bar{Q_1} = \emptyset$ となる．このときある $\langle s, B'\rangle \leq \langle s, B\rangle$ が存在して，$[s, B']^\omega \subseteq \bar{Q_2}$ となり同様によい． □

Mathias condition から従う系として Mathias real の特徴が次である．Solovay モデルの中で ω が強い分割の性質を持っていることは本質的に次を使っている．

定理 1.8. x を V 上の Mathias real とする．このとき任意の $y \in [x]^\omega$ はまた V 上の Mathias real となる．

証明. $\mathbb{M}$ の稠密開集合 D を任意に取る．　D に対して，稠密性から各 $\langle s, A\rangle \in \mathbb{M}$ は *good* である．D' を $\langle s, A\rangle \in \mathbb{M}$ ですべての $t \subseteq s$ に対して $[t, A]^\omega \subseteq \bar{D}$ を満たすもの全体の集合とする．まず定義より D' は明らかに $\mathbb{M}$ の開集合である．

D' が $\mathbb{M}$ で稠密であることを示す．D が稠密であったことから $\langle s, A\rangle \in D$ を任意に取る．s の部分集合の数え上げを $\{t_i \mid i < n+1\}$ とする．D は稠密開集合であるから，$\langle t_0, B_0\rangle$ で $B_0 \subseteq A$ かつ $[t_0, B_0]^\omega \subseteq \bar{D}$ となるようなものを取る．これを繰り返して各 $i < n$ において，$\langle t_{i+1}, B_{i+1}\rangle$ で $B_{i+1} \subseteq B_i$ かつ $[t_{i+1}, B_{i+1}]^\omega \subseteq \bar{D}$ となるようなものが取れる．$B = B_n$ とすると $\langle s, B\rangle \in D'$ かつ $\langle s, B\rangle \leq \langle s, A\rangle$ となり D' が $\mathbb{M}$ で稠密であることがわかる．

x を V 上の Mathias real とする．$y \in [x]^\omega$ を任意に取る．D' は稠密開集合かつ x は $(V, \mathbb{M})$-generic より，

ある $\langle s, A\rangle \in D'$ で $s \subseteq x \subseteq A \cup s$ となるものが存在する．$t = y \cap s$ とすると $t \subseteq y \subseteq A \cup t$ となり，D' の定義より $[t, A]^\omega \subseteq \bar{D}$ となる．よって y は D と交わる．D は任意であったから，y は V 上の Mathias real であることがわかる． $\square$

また少し寄り道として Mathias forcing の性質を他にもみる．Mathias forcing は Cohen real を付加しない．

定義 1.9 (Laver の性質)**.** $\mathcal{F} = \{S\colon \omega \to [\omega]^{<\omega} \mid \forall n \in \omega(|S(n)| \leq 2^n)\}$ とする．

半順序 $\mathbb{P}$ が Laver の性質を持つとは，任意の $f \in \omega^\omega \cap V$ と任意の ω^ω の元の $\mathbb{P}$-name $\dot{g}$ に対して，$\mathbb{1} \Vdash \forall n \in \omega(\dot{g}(n) \leq \check{f}(n))$ ならば $\mathbb{1} \Vdash \exists S \in \mathcal{F} \cap \check{V} \forall n \in \omega(\dot{g}(n) \in S(n))$ が成立するときのことをいう．

命題 1.10. 半順序 $\mathbb{P}$ が Laver の性質を持つとき，$\mathbb{P}$ は Cohen real を付加しない．

証明. 半順序 $\mathbb{P}$ が Laver の性質を持つと仮定する．V において ω の分割 $\{I_n \mid n \in \omega\}$ ですべての $n \in \omega$ に対して，$|I_n| = 2n$ かつ $\max(I_n) < \min(I_{n+1})$ を満たすものを固定しておく．

$\mathbb{P}$-name $\dot{h}$ で $\mathbb{1} \Vdash \dot{h} \in 2^\omega$ となるものを任意に取る．これが Cohen real の $\mathbb{P}$-name でないことを示す．各 $n \in \omega$ に対して，$\dot{H}(n) = \dot{h}_{\restriction I_n}$ とする．各 $\dot{H}(n)$ を 2^{2n} 以下の自然数の $\mathbb{P}$-name としてコードし，それを $\eta(\dot{H}(n))$ とする．$\dot{g}(n) = \eta(\dot{H}(n))$ と定義する．このとき $\mathbb{1} \Vdash \forall n \in \omega(\dot{g}(n) \leq 2^{2n})$ が成立し，半順序 $\mathbb{P}$ が Laver の性質を持つことから $\mathbb{1} \Vdash \exists S \in \mathcal{F} \cap V \forall n \in \omega(\dot{g}(n) \in S(n))$ が成立する．

ある $p \in \mathbb{P}$ と $S \in \mathcal{F} \cap V$ において，$p \Vdash \forall n \in \omega(\dot{g}(n) \in \check{S}(n))$ と仮定する．$D = \{q \in 2^{<\omega} \mid \exists k \in \omega(I_k \subseteq \mathrm{dom}(q) \wedge \eta(q_{\restriction I_k}) \notin S(k))\}$ とすると，これは $2^{<\omega}$ の稠密開集合である．また各 $n \in \omega$ に対して，$A_n = \{x \in 2^\omega \mid \eta(x_{\restriction I_n}) \in S(n)\} \subseteq 2^\omega$ とし，$A = \bigcap_{n\in\omega} A_n$ とする．このとき $p \Vdash \forall n \in \omega(\dot{g}(n) \in \check{S}(n))$ であることから $p \Vdash \dot{h} \in \check{A}$ が成立する．従って $p \Vdash \forall n \in \omega(\dot{h}_{\restriction n} \notin \check{D})$ が成立することから $\dot{h}$ は Cohen real の $\mathbb{P}$-name でない． $\square$

命題 1.11. Mathias forcing は Laver の性質を持つ．よって Cohen real を付加しない．

証明. $\mathcal{F} = \{S\colon \omega \to [\omega]^{<\omega} \mid \forall n \in \omega(|S(n)| \leq 2^n)\}$ とする．任意に $f \in \omega^\omega \cap V$ と ω^ω の元の $\mathbb{P}$-name $\dot{g}$ で $\mathbb{1} \Vdash \forall n \in \omega(\dot{g}(n) \leq f(n))$ となるものを取る．Mathias condition より，任意の $\langle s, A\rangle \in \mathbb{M}$ と任意の $n \in \omega$ に対して，ある $\langle s, B\rangle \leq \langle s, A\rangle$ とある $k \in \omega$ が存在して $\langle s, B\rangle \Vdash \dot{g}(n) = k$ となることがわかる．任意に $\langle s, A\rangle \in \mathbb{M}$ を取る．次のようにして $\dot{g}$ を *decide* していく．まず $A_0 \subseteq A$ を $\langle s, A_0\rangle \parallel \dot{g}(0)$ となるように取る．$S(0) = \{k \leq f(0) \mid \langle s, A_0\rangle \Vdash \dot{g}(0) = k\}$ とする．a_0 を A_0 の最小元とし，$A_1 \subseteq (A_0 \setminus (a_0 + 1))$ を $\langle s \cup \{a_0, A_1\rangle \parallel \dot{g}(1)$ となるように取る．これを繰り返して，各 $n \in \omega$ に対し，a_n を A_n の最小元とし $A_{n+1} \subseteq (A_n \setminus (a_n + 1))$ をすべての $\bar{a} \subseteq \{a_0, \ldots, a_n\}$ に対して，$\langle s \cup \bar{a}, A_{n+1}\rangle \parallel \dot{g}(n+1)$ となるように取る．$S(n+1)$ を $k \leq f(n+1)$ である $\bar{a} \subseteq \{a_0, \ldots, a_n\}$ が存在して，$\langle s \cup \bar{a}, A_{n+1}\rangle \Vdash \dot{g}(n+1) = k$ となるようなものの全体の集合とする．取り方より $|S(n+1)| \leq 2^{n+1}$ である．構成より $S \in \mathcal{F} \cap V$ である．$B = \{a_n \mid n \in \omega\} \in [\omega]^\omega$ とすると，$\langle s, B\rangle \leq \langle s, A\rangle$ かつ各 $n \in \omega$ に対して $\langle s, B\rangle \Vdash \dot{g}(n) \in \check{S}(n)$ が成立する． $\square$

さらに Mathias forcing は proper である．

命題 1.12. Mathias forcing は proper

証明. 正則基数 λ を十分大きく取る．任意に可算初等部分構造 $N \prec H_\lambda$ で $\mathbb{M} \in N$ なるものを取る．任意

に $\langle s, A\rangle \in \mathbb{M} \cap N$ を取る．N は可算であるから N 上の Mathias real $x \in [s, A]^\omega \cap V$ が取れる．このとき $\langle s, x \setminus s\rangle \leq \langle s, A\rangle$ かつ $\langle s, x \setminus s\rangle$ は $(N, \mathbb{M})$-generic となっている． □

系 1.13. Mathias forcing は $\aleph_1$ を保存する．

2 Solovay モデル

次のような分割の性質を考える．

定義 2.1. $Y \subseteq [\omega]^\omega$ が Ramsey であるとは，ある $x \in [\omega]^\omega$ が存在して $[x]^\omega \subseteq Y$ または $[x]^\omega \cap Y = \emptyset$ が成立することをいう．

定義から $\omega \longrightarrow (\omega)^\omega_2$ はすべての $Y \subseteq [\omega]^\omega$ が Ramsey であることと同値である．

命題 2.2. ZFC において $\omega \longrightarrow (\omega)^\omega_2$ は成立しない．

証明. 無限集合 $X \subseteq \omega$ に対して，X^* を X との対称差が有限集合となる ω の部分集合の同値類の代表元とし固定しておく．このとき $Y = \{X \in [\omega]^\omega \mid |X \triangle X^*|$ が偶数 $\}$ とすると，これは Ramsey でない． □

選択公理があると $\omega \longrightarrow (\omega)^\omega_2$ は成立しないが，Solovay モデルにおいては成立することが次から分かる．

定義 2.3. 集合 X が ${}^\omega\mathrm{ON}$-定義可能であるとは，ある $a \in {}^\omega\mathrm{ON}$ と論理式 $\varphi(v_1, v_2)$ が存在して次が成立することである．

$$y \in X \leftrightarrow \varphi[a, y]$$

定理 2.4 (Mathias)**.** κ を到達不能基数とする．G を $(V, \mathrm{Coll}(\omega, {<}\kappa))$-generic とする．このときある $V[G]$ の内部モデルで次を満たすようなものが存在する．

1. $\omega \longrightarrow (\omega)^\omega_2$
2. DC

これは次を示せばよいことがわかる．

定理 2.5. κ を到達不能基数とし，G を $(V, \mathrm{Coll}(\omega, {<}\kappa))$-generic とする．このとき $V[G]$ においてすべての ${}^\omega\mathrm{ON}$-定義可能な $[\omega]^\omega$ の部分集合は Ramsey である．

証明. 任意に ${}^\omega\mathrm{ON}$-定義可能な $[\omega]^\omega$ の部分集合 Y を取る．$a \in {}^\omega\mathrm{ON}$ と論理式 $\varphi(v_1, v_2)$ を次を満たすように取る．

$$y \in Y \leftrightarrow V[a][y] \models \varphi[a, y]$$

$V[a]$ の中で Mathias forcing $\mathbb{M}$ を考える．$\dot{x}$ を Mathias real の canonical name とする．Mathias conditon よりある $\langle \emptyset, A\rangle \in \mathbb{M}$ が存在して，$\langle \emptyset, A\rangle \parallel \varphi(\check{a}, \dot{x})$ を満たす．$\langle \emptyset, A\rangle \Vdash \varphi(\check{a}, \dot{x})$ と仮定する．$V[G]$ での $\aleph_1$ は $V[a]$ の中で到達不能基数となっているから，$V[G]$ において $\langle \emptyset, A\rangle$ を含む generic を取ることにより $V[a]$ 上の Mathias real $x \subseteq A$ が存在することがわかる．$y \in [x]^\omega$ を任意に取る．このとき y は $V[a]$ 上の Mathias real で $\langle \emptyset, A\rangle \Vdash \varphi(\check{a}, \dot{x})$ かつ $y \subseteq A$ であることから $V[a][y] \models \varphi[a, y]$ が成立することがわかる．ゆえ $y \in Y$．$y \in [x]^\omega$ は任意であったことから $[x]^\omega \subseteq Y$ つまり Y は Ramsey である．$\langle \emptyset, A\rangle \Vdash \neg\varphi(\check{a}, \dot{x})$ のときも同様である． □

命題 2.6 (ZF + DC)**.** $L(\mathbb{R})$ において DC が成立する．

このことから $L(\mathbb{R})^{V[G]}$ が ZF + DC + $\omega \longrightarrow (\omega)^{\omega}_{2}$ のモデルになっていることがわかる．

系 2.7. $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \exists\kappa : 到達不能基数) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZF} + \mathrm{DC} + \omega \longrightarrow (\omega)^{\omega}_{2})$

Solovay モデルの中では ω 上に強い分割の性質が乗っていることをみた．またこの $L(\mathbb{R})^{V[G]}$ では次も成立している．

1. すべての実数の集合は Lebesgue 可測．
2. すべての実数の集合は Baire の性質を持つ．
3. すべての実数の集合は完全集合の性質を持つ．

3 決定性

$\omega \longrightarrow (\omega)^{\omega}_{2}$ は実数の集合の正則性だと思える．実際に決定性公理のもとでこのような正則性は成立するかという問題に関していくつかの結果がある．それらを紹介して終えるとする．

定理 3.1 (Prikry)**.** $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ を仮定すると $\omega \longrightarrow (\omega)^{\omega}_{2}$ が成立する．

定理 3.2. $\mathrm{AD} + V = L(\mathbb{R})$ を仮定すると $\omega \longrightarrow (\omega)^{\omega}_{2}$ が成立する．

$\omega \longrightarrow (\omega)^{\omega}_{2}$ が AD からの帰結になるかどうかは未解決である．

参考文献

[1] A. J. Kanamori, The Higher Infinite, Second Edition. Springer, 2009.

[2] J. Halbeisen, Lorenz, Combinatorial set theory. With a gentle introduction to forcing. 10.1007/978-1-4471-2173-2, 2012.

[3] T. Jech, Set Theory. Bulletin of Symbolic Logic. 11 (2):243-245, 2005.

[4] K. Kunen 著，藤田博司訳．集合論 独立性証明への案内. 日本評論社，2008.