# Moschovakis' scale construction

YasudaYasutomo

2020 年 2 月 28 日

Moschovakis' scale construction についての簡単なまとめ.

## 1 Periodicity

**定義 1.1.**

- pointset $P$ に対して, $P$ 上の norm の列 $\vec{\varphi} = \langle \varphi_n \mid n \in \omega \rangle$ を $P$ 上の putative scale という.
- $P$ 内の列 $\langle x_n \mid n \in \omega \rangle$ に対して,
$$x_n \to x \mod \vec{\varphi}$$
とは $\lim x_n = x$ かつ各 $n \in \omega$ に対して $\varphi_n(x_0), \varphi_n(x_1), \ldots$ が収束するときのことをいう.
- $P$ 上の putative scale $\vec{\varphi}$ が semi-scale であるとは次が成立するときのことをいう.
$$x_n \to x \mod \vec{\varphi} \Rightarrow x \in P$$
- $P$ 上の putative scale $\vec{\varphi}$ が scale であるとは $\vec{\varphi}$ は semi-scale かつ任意の $i \in \omega$ に対して次が成立するときのことをいう. [*1]
$$x_n \to x \mod \vec{\varphi} \Rightarrow \varphi_i(x) \leq \lim_n \varphi_i(x_n)$$

Moschovakis の Periodicity theorem においては次の 2 種類の scale construction が重要であった. 証明はしないが概要だけ述べておく. pointset $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に対して次のように定める.

$$Q(x) \Leftrightarrow \exists \alpha P(x, \alpha)$$

$\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ を $P$ 上の norm とする. $Q$ 上の norm $\psi_n = \inf\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ を次のように定義する.

$$\psi_n(x) = \inf\{\langle \varphi_0(x, \alpha), \alpha(0), \ldots, \varphi_n(x, \alpha), \alpha(n) \rangle \mid P(x, \alpha)\}$$

このようにして $P$ 上の putative scale $\vec{\varphi} = \langle \varphi_n \mid n \in \omega \rangle$ に対して, $Q$ 上の putative scale $\vec{\psi} = \inf \vec{\varphi}$ が定義できる.

**補題 1.2.** $P$, $Q$, $\vec{\varphi}$, $\vec{\psi}$ を上と同じとする. このとき次が成立する.

1. $Q$ 内の列 $\langle x_n \mid n \in \omega \rangle$ が
$$x_n \to x \mod \vec{\psi}$$

[*1] この条件を $\varphi_n$ は $\vec{\varphi}$ に対して lower semi-continuous という.

を満たすと仮定する．このとき部分列 $x_k^* = x_{n_k}$ と $\alpha$, $\langle \alpha_n \mid n \in \omega \rangle$ が存在して任意の $k \in \omega$ に対して $P(x_k^*, \alpha_k)$ かつ次が成立する．

$$\langle x_k^*, \alpha_k \rangle \to \langle x, \alpha \rangle \mod \vec{\varphi}$$

2. $\vec{\varphi}$ が semi-scale かつ $i = 0, \dots, m$ に対して $\varphi_i$ が $\vec{\varphi}$ に対して lower semi-continuous とする．このとき $\psi_n$ は $\vec{\psi}$ に対して lower semi-continuous. 特に $\vec{\varphi}$ が scale ならば $\vec{\psi}$ は scale. □

また今度は pointset $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に対して次のように定める．

$$Q(x) \Leftrightarrow \forall \alpha P(x, \alpha)$$

$\vec{\varphi}$ を $P$ 上の putative scale とする．$\omega^{<\omega}$ の標準的な数え上げ $\langle r_n \mid n \in \omega \rangle$ を固定する．$n \in \omega$ と $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $G_n(x, y)$ を I が $\alpha'$, II が $\beta'$ を play したとき，$\alpha = r_n {}^\frown \alpha'$, $\beta = r_n {}^\frown \beta'$ に対して次のように定義する．

$$\text{II wins} \Leftrightarrow \langle \varphi_0(x, \alpha), \dots, \varphi_n(x, \alpha) \rangle \leq \langle \varphi_0(y, \beta), \dots, \varphi_n(y, \beta) \rangle$$

十分な決定性を仮定する．このとき

$$x \leq_n y \Leftrightarrow x, y \in \mathbb{R} \wedge \text{II wins } G_n(x, y)$$

と定義するとこれは pwo となる．各 $n \in \omega$ について $Q$ 上の norm $\psi_n = \sup\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ を $\leq_n$ のランク関数として定義することで $Q$ 上の putative scale $\vec{\psi} = \sup \vec{\varphi}$ を得る．

**補題 1.3.** $P$, $Q$, $\vec{\varphi}$, $\vec{\psi}$ を上と同じとする．$\Gamma$ を adequate pointclass とし $\mathrm{Det}(\boldsymbol{\Delta})$ を仮定する．各 $i \in \omega$ について $\varphi_i$ が $\Gamma$-norm であるとき次が成立する．

1. $Q$ 内の列 $\langle x_n \mid n \in \omega \rangle$ が

$$x_n \to x \mod \vec{\psi}$$

を満たすと仮定する．このとき任意の $\alpha$ に対して部分列 $x_k^* = x_{n_k}$ と $\langle \alpha_n \mid n \in \omega \rangle$ が存在して任意の $k \in \omega$ に対して $P(x_k^*, \alpha_k)$ かつ次が成立する．

$$\langle x_k^*, \alpha_k \rangle \to \langle x, \alpha \rangle \mod \vec{\varphi}$$

2. $\vec{\varphi}$ が semi-scale かつ $i = 0, \dots, m$ に対して $\varphi_i$ が $\vec{\varphi}$ に対して lower semi-continuous とする．このとき $\psi_n$ は $\vec{\psi}$ に対して lower semi-continuous. 特に $\vec{\varphi}$ が scale ならば $\vec{\psi}$ は scale. □

## 2 Scales on coinductive sets

$Q \subseteq \mathbb{R}$ を coinductive set とする．このとき算術的な関係 $R$ が存在して次を満たす．

$$Q(x) \Leftrightarrow ((\exists \alpha_0)(\forall \alpha_1)(\exists \alpha_2) \dots)(\forall t) R(\bar{x}(t), \langle \bar{\alpha}_0(t), \dots, \bar{\alpha}_{t-1}(t) \rangle)$$

ただし $\bar{\alpha}(n) = \langle \alpha(0), \dots, \alpha(n-1) \rangle$ とする．$\boldsymbol{\Sigma}_0^*$ を inductive set と coinductive set のブール結合からなる pointclass とする．$n \geq 1$ の対して $\boldsymbol{\Sigma}_n^*$ を射影階層と同様に定義する．

**定理 2.1** ($\mathrm{Det}(\bigcup_{\mathrm{n}\in\omega} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{n}}^*)$)**.** 任意の coinductive set $Q$ に対して $(\bigcup_{n\in\omega} \boldsymbol{\Sigma}_n^*)$-scale $\vec{\psi}$ が存在する．[*2]

[*2] さらにそれぞれの norm の definability は $\bigcup_{n\in\omega} \boldsymbol{\Sigma}_n^*$ の中で cofinal となっている．また [1] においてはそれぞれ $\psi_i$ が $\boldsymbol{\Sigma}_n^*$-norm で取れると書いてあるが分からない．

*Proof.*

$$Q(x) \Leftrightarrow ((\exists\alpha_0)(\forall\alpha_1)(\exists\alpha_2)\dots)(\forall t)R(\bar{x}(t), \langle\bar{\alpha}_0(t), \dots, \bar{\alpha}_{t-1}(t)\rangle)$$

となるような $R$ を取る. $n$ が偶数のとき,

$$Q_n(x, \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \Leftrightarrow ((\exists\alpha_n)(\forall\alpha_{n+1})(\exists\alpha_{n+2})\dots)(\forall t)R(\bar{x}(t), \langle\bar{\alpha}_0(t), \dots, \bar{\alpha}_{t-1}(t)\rangle)$$

と定義する. これは coinductive となる. $n$ が奇数のとき,

$$Q_n(x, \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \Leftrightarrow \forall\alpha_n Q_{n+1}(x, \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$$

と定義する. 各 $n \in \omega$ に対して $Q_n$ 上の putative scale $\vec{\psi}^n = \langle\psi_i^n \mid i \in \omega\rangle$ を次のように定義する.

$n$ が偶数かつ $i = 0$ の場合, $Q_n(x, \vec{\alpha})$ のとき $\psi_0^n(x, \vec{\alpha}) = 0$ と定義する. これは $\mathbf{\Sigma}_0^*$-norm となる. $n$ が奇数の場合, $Q_n = \forall^{\mathbb{R}} Q_{n+1}$ が成立している. $\langle\psi_j^{n+1} \mid j \leq i\rangle$ まで構成したとき $\psi_i^n = \sup\{\psi_0^{n+1}, \dots, \psi_i^{n+1}\}$ と定義する. $n$ が偶数かつ $i > 0$ の場合, $Q_n = \exists^{\mathbb{R}} Q_{n+1}$ が成立している. $\langle\psi_j^{n+1} \mid j < i\rangle$ まで構成したとき $\psi_i^n = \inf\{\psi_0^{n+1}, \dots, \psi_{i-1}^{n+1}\}$ と定義する.

definability の計算

$n$ が偶数かつ $i > 0$ の場合.

$$\begin{aligned} & x \leq_{\psi_i^n} y \\ & \Leftrightarrow x \in Q_n \wedge \forall\alpha\exists\beta\langle\psi_0^{n+1}(x, \beta), \beta(0), \dots, \psi_{i-1}^{n+1}(x, \beta), \beta(i-1)\rangle \leq \langle\psi_0^{n+1}(y, \alpha), \alpha(0), \dots, \psi_{i-1}^{n+1}(y, \alpha), \alpha(i-1)\rangle \\ & \Leftrightarrow x \in Q_n \wedge \exists\beta\forall\alpha\neg\left(\langle\psi_0^{n+1}(y, \alpha), \alpha(0), \dots, \psi_{i-1}^{n+1}(y, \alpha), \alpha(i-1)\rangle < \langle\psi_0^{n+1}(x, \beta), \beta(0), \dots, \psi_{i-1}^{n+1}(x, \beta), \beta(i-1)\rangle\right) \end{aligned}$$

$n$ が奇数かつ $i > 0$ の場合.

$$\begin{aligned} & x \leq_{\psi_i^n} y \\ & \Leftrightarrow x \in Q_n \wedge \forall\sigma\exists\beta\langle\psi_0^{n+1}(x, r_i\hat{}\sigma * [\beta]), \dots, \psi_i^{n+1}(z, r_i\hat{}\sigma * [\beta])\rangle \leq \langle\psi_0^{n+1}(y, r_i\hat{}\beta), \dots, \psi_i^{n+1}(y, r_i\hat{}\beta)\rangle \\ & \Leftrightarrow x \in Q_n \wedge \exists\tau\forall\beta\neg(\langle\psi_0^{n+1}(y, r_i\hat{}\beta), \dots, \psi_i^{n+1}(y, r_i\hat{}\beta)\rangle < \langle\psi_0^{n+1}(x, r_i\hat{}\tau * [\beta]), \dots, \psi_i^{n+1}(z, r_i\hat{}\tau * [\beta])\rangle) \end{aligned}$$

上のようになるので definability は $\bigcup_{n\in\omega} \mathbf{\Sigma}_n^*$ で収まる.

次に $\vec{\psi}^0$ が $Q$ 上の scale となっていることを示す. lower semi-continuity は補題 1.2 と補題 1.3 から帰納的にすぐ示せるので semiscale であることを示せば十分. $Q$ 内の列 $\langle x_n \mid n \in \omega\rangle$ を

$$x_n \to x \mod \vec{\psi}^0$$

を満たすように取る. $((\exists\alpha_0)(\forall\alpha_1)(\exists\alpha_2)\dots)(\forall t)R(\bar{x}(t), \langle\bar{\alpha}_0(t), \dots, \bar{\alpha}_{t-1}(t)\rangle)$ であることを示せばよい. 補題 1.2 より $\langle x_n \mid n \in \omega\rangle$ の部分列 $\langle x_n^0 \mid n \in \omega\rangle$ と $\alpha_0$, $\langle\alpha_{0,n}^0 \mid n \in \omega\rangle$ を次を満たすように取る. [*3]

$$\langle x_n^0, \alpha_{0,n}^0\rangle \to \langle x, \alpha_0\rangle \mod \vec{\psi}^1$$

$\alpha_1$ が任意に与えられたとする. 補題 1.3 より $\langle\langle x_n^0, \alpha_{0,n}^0\rangle \mid n \in \omega\rangle$ の部分列 $\langle\langle x_n^1, \alpha_{0,n}^1 \mid n \in \omega\rangle$ と $\langle\alpha_{1,n}^1 \mid n \in \omega\rangle$ を次を満たすように取る.

$$\langle x_n^1, \alpha_{0,n}^1, \alpha_{1,n}^1\rangle \to \langle x, \alpha_0, \alpha_1\rangle \mod \vec{\psi}^2$$

[*3] 正確には $\inf\vec{\psi}^1$ と $\vec{\psi}^0$ は異なるが, $\mod \vec{\psi}^0$ で収束しているならば $\mod \inf\vec{\psi}^1$ でも収束が言えるので補題 1.2 と同様のことができる.

今度は補題 1.2 を使って部分列と $\alpha_2$ を取る．この操作を繰り返す．このとき構成より各 $n, m \in \omega$ に対して $Q_n(x_m^{n-1}, \alpha_{0,m}^{n-1}, \dots, \alpha_{n-1,m}^{n-1})$ が成立する．$t = n$ を考えると $R(\bar{x}_m^{n-1}(n), \langle \bar{\alpha}_{0,m}^{n-1}(n), \dots, \bar{\alpha}_{n-1,m}^{n-1}(n)\rangle)$ が成立する．

$$\langle x_m^{n-1}, \alpha_{0,m}^{n-1}, \dots, \alpha_{n-1,m}^{n-1}\rangle \to \langle x, \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\rangle$$

であることから各 $n \in \omega$ について $R(\bar{x}(n), \langle \bar{\alpha}_0(n), \dots, \bar{\alpha}_{n-1}(n)\rangle)$ が成立する．よって示された． $\square$

上の構成を Moschovakis' scale construction と呼ぶ．Scale となることの証明はややこしいが要するに十分な決定性の元で

$$Q(x) \Leftrightarrow ((\exists\alpha_0)(\forall\alpha_1)(\exists\alpha_2)\dots)(\forall t)R(\bar{x}(t), \langle \bar{\alpha}_0(t), \dots, \bar{\alpha}_{t-1}(t)\rangle)$$

のような表示を持つ pointset は補題 1.2 と補題 1.3 を用いることで scale を乗せることができるという話である．この表示が次の closed game representation のアイデアの 1 つになっている．

# 3 Scales in $L(\mathbb{R})$

$\mathbb{R}^\omega$ と $\mathbb{R}$ の recursive homeomorphism を 1 つ固定しておく．順序数 $\alpha$ を固定する．各 $x \in \mathbb{R}$ に対して player I は実数と $\alpha$ 未満の順序数をプレイし，player II は実数をプレイするゲーム $G_x$ を考える．

**定義 3.1.** $\alpha$ を順序数とする．写像 $(x \mapsto G_x)$ が closed and continuous であるとはある $\omega \times \omega \times \alpha$ 上の木 $T$ が存在して, 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して $G_x$ を player I の payoff が $[T(x)]$[*4]であるときのことをいう．

**定義 3.2.** $P \subseteq \mathbb{R}$ に対して写像 $(x \mapsto G_x)$ が $P$ の closed game representation であるとは $(x \mapsto G_x)$ が closed and continuous かつ

$$P(x) \Leftrightarrow \text{I has a winning quasi-strategy in } G_x$$

を満たすときのことをいう．

十分な決定性を仮定する．$P$ が closed game representation $(x \mapsto G_x)$ を持つとする．このとき Moschovakis' scale construction によって $P$ に scale が乗ることを示す．実際 $P$ は次を満たしている．

$$\begin{aligned} P(x) &\Leftrightarrow ((\exists x_0)(\beta_0)(\forall x_1)(\exists x_2)(\exists\beta_1)(\forall x_3)\dots)(x, \langle x_n \mid n \in \omega\rangle^*, \langle \beta_n \mid n \in \omega\rangle) \in [T] \\ &\Leftrightarrow ((\exists x_0)(\beta_0)(\forall x_1)(\exists x_2)(\exists\beta_1)(\forall x_3)\dots)(\forall n \in \omega)(x \restriction_n, \langle x_n \mid n \in \omega\rangle^* \restriction_n, \langle \beta_n \mid n \in \omega\rangle \restriction_n) \in T \end{aligned}$$

各 $k \in \omega$ について $P_k(x, u)$ であるとは $u$ は player I が $G_x$ での winning quasi-strategy 従ったときの長さ $k$ の position であるときと定義する．このとき $P = P_0$ である．各 $k \in \omega$ に対して $P_k(x, u)$ ならば $\varphi_0^k(x, u) = 0$ と定義する．

$$\varphi_{i+1}^k = \begin{cases} \sup\{\varphi_0^{k+1}, \dots, \varphi_i^{k+1}\} & \text{if } P_k(x,u) \Leftrightarrow \forall y P_{k+1}(x, u^\frown\langle y\rangle) \\ \inf\{\varphi_0^{k+1}, \dots, \varphi_i^{k+1}\} & \text{if } P_k(x,u) \Leftrightarrow \exists y P_{k+1}(x, u^\frown\langle y\rangle) \\ \langle \beta, \varphi_0^{k+1}(x, u^\frown\langle\beta\rangle), \dots, \varphi_i^{k+1}(x, u^\frown\langle\beta\rangle)\rangle & \text{if } P_k(x,u) \Leftrightarrow \exists\beta P_{k+1}(x, u^\frown\langle\beta\rangle) \\ & \text{and } \beta \text{ is the least such one} \end{cases}$$

このとき補題 1.2，補題 1.3 がほぼ同様に成り立つことから $\vec{\varphi}^k$ は $P_k$ 上の scale である．

**補題 3.3.** $\Game^{\mathbb{R}}\Pi_1^1$ 集合は closed game representation を持つ．

[*4] recursive homeomorphism で同一視している．

**補題 3.4.** $\Game^{\mathbb{R}}\Pi^1_1 = \Sigma_1(L(\mathbb{R}), \{\mathbb{R}\})$.

**定理 3.5.** $\mathrm{Det}(L(\mathbb{R}))$ を仮定する．このとき $\Sigma_1(L(\mathbb{R}), \{\mathbb{R}\})$ と $\Sigma_1(L(\mathbb{R}), \{\mathbb{R}\} \cup \mathbb{R})$ は scale property を持つ．

*Proof.* $P$ を $\Sigma_1(L(\mathbb{R}), \{\mathbb{R}\})$ とする．$\Delta_1(L(\mathbb{R}), \{\mathbb{R}\})$ な $(\langle x, \alpha\rangle \mapsto G^*_{x,\alpha})$[*5] を

$$P(x) \Leftrightarrow \exists\alpha(\text{I has a winning quasi-strategy in } G^*_{x,\alpha})$$

を満たすように取る．$P^\alpha$ を

$$P^\alpha(x) \Leftrightarrow \text{I has a winning quasi-strategy in } G^*_{x,\alpha}$$

と定義する．このとき Moschovakis' scale construction とその定義の一様性から $(\alpha \mapsto \vec{\psi}^\alpha)$ が $\Delta_1(L(\mathbb{R}), \{\mathbb{R}\})$ で取れる．ただし $\vec{\psi}^\alpha$ は $P^\alpha$ 上の scale である．$x \in P$ に対して $\vec{\varphi}$ を次のように定義する．

$$\varphi_0(x) = \min\{\alpha \mid P^\alpha(x)\}$$
$$\varphi_{n+1}(x) = \langle \varphi_0(x), \psi_n^{\varphi_0(x)}(x)\rangle$$

これは $\Sigma_1(L(\mathbb{R}), \{\mathbb{R}\})$-scale となっている．

definability の計算

場合分けを書けばよいので個々のケースの definability の計算をする．

$$\begin{aligned} x \le_{\varphi_0} y &\Leftrightarrow \forall\alpha \in \mathrm{ON}(\neg\psi_0^\alpha(y) = 0 \vee \psi_0^\alpha(x)) \\ &\Leftrightarrow \exists\alpha \in \mathrm{ON}(\psi_0^\alpha(x) = 0 \wedge \forall\beta \in \alpha(y \notin \mathrm{dom}(\psi_0^\beta))) \end{aligned}$$

$n > 0$ の場合.

$$\begin{aligned} x \le_{\varphi_n} y \Leftrightarrow &(\varphi_0(x) = \varphi_0(y) \wedge \psi_{n-1}^{\varphi_0(x)}(x) = \psi_{n-1}^{\varphi_0(y)}(y)) \\ &\vee (\varphi_0(x) < \varphi_0(y)) \vee (\varphi_0(x) = \varphi_0(y) \wedge \psi_{n-1}^{\varphi_0(x)}(x) < \psi_{n-1}^{\varphi_0(y)}(y)) \end{aligned}$$

あとは簡単にわかる．

□

## 参考文献


[1] Y.N. Moschovakis, Scales on coinductive sets, in Cabal Seminar 79-81, A.S. Kechris, D.A. Martin, and Y.N. Moscovakis eds., Lecture Notes in Math, vol. 1019 (1983), Springer-Verlag, Berlin, 77-85.

[2] D.A. Martin and J.R. Steel, The extent of scales in L(R) , in: A.S. Kechris et. al. (editors), Cabal Seminar 79-81, Lecture Notes in Mathematics 1019, Springer-Verlag, New York (1983), 86-96.

[3] J.R. Steel, Scales in L(R), in Cabal Seminar 79-81, A.S. Kechris, D.A. Martin, and Y.N. Moscovakis eds., Lecture Notes in Math, vol. 1019 (1983), Springer-Verlag, Berlin, 107-156.

[4] Moschovakis, Yiannis. (2020). Descriptive set theory / Yiannis N. Moschovakis. SERBIULA (sistema Librum 2.0).


[*5] $\Pi^1_1$ から定まる木は論理式に埋め込んでおけばよい．