Simple theory のセミナーノート

YasudaYasutomo

2019 年 12 月 19 日

A Course in Model Theory 7 章のセミナーノートです.
セミナーで無駄な議論などを指摘してくださった先輩方に感謝します.

1 Forking and Dividing

この章では断りのない限り T は可算完全で無限モデルを持つと仮定して議論する.
T の monster model を $\mathfrak{C}$ を固定する. [*1]

補題 1.1 (The Standard lemma)**.** A を集合, I を tuple の無限列, J を全順序集合とする.
このとき J で順序づけられた A-indiscernible で $\mathrm{EM}(I/A)$ を実現するものが存在する.

$\mathrm{EM}(I/A)$ というのは $L(A)$-論理式 φ で

$$\mathfrak{C} \models \varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \text{ for all } a_{i_1} < \cdots < a_{i_n} \in I$$

を満たすもの全体からなるタイプであった.

定義 1.2 (Dividing)**.** $b \in \mathfrak{C}$ とする. [*2]

- 論理式 $\varphi(x, b)$ が $k \in \omega$ に関して A 上 divide する[*3]とはある列 $(b_i)_{i \in \omega}$ が存在して次を満たすことをいう.
  1. $\mathrm{tp}(b_i/A) = \mathrm{tp}(b/A)$ for all $i \in \omega$
  2. $(\varphi(x, b_i))_{i \in \omega}$ is k-inconsistent[*4]
- 論理式の集合 $\pi(x)$ に対して, $\pi(x)$ が A 上 divide するとはある $b \in \mathfrak{C}$ と論理式 $\varphi(x, y)$ が存在して次を満たすことをいう.
  1. $\pi(x) \models \varphi(x, b)$
  2. $\varphi(x, b)$ は A 上 divide する

Dividing の基本的な性質を次で示す.[*5]

命題 1.3. $\varphi(x, a) \models \psi(x, b)$ とし, $\psi(x, b)$ が A 上 divide すると仮定する.

[*1] 集合論的な細かいことは気にしない.
[*2] b は tuple でも問題ない.
[*3] k が明示されてないときは for some $k \in \omega$ とする.
[*4] 思い出しておくと論理式の集合が k-inconsistent とは任意に k 個取り出してくると inconsistent になることだった.
[*5] 本文中ではあっさり書かれているが重要だと思う.

このとき $\varphi(x,a)$ は A 上 divide する.

証明. $\psi(x,b)$ は A 上 divide することより, $(b_i)_{i\in\omega}$ を witness として取る.

各 $i\in\omega$ について,

$$\mathrm{tp}(a/A)\cup\{\forall x(\varphi(x,y)\to\psi(x,b_i))\}\cup T$$

を考える. [*6]これは有限充足可能である.

実際 $\Delta(y)\subseteq_{\mathrm{fin}}\mathrm{tp}(a/A)$ を取ると, $\exists y(\bigwedge\Delta(y)\wedge\forall(\varphi(x,y)\to\psi(x,z))\in\mathrm{tp}(b/A)=\mathrm{tp}(b_i/A)$ より, $z=b_i$ に対する witness a_i をそれぞれ取れば良い.

よって各 $i\in\omega$ での実現 $(a_i)_{i\in\omega}$ を取ると構成より $\varphi(x,a)$ が A 上 divide することの witness となる. □

系 1.4. φ が A 上 divide することと $\{\varphi\}$ が A 上 divide することは同値.

命題 1.5. $\pi(x)$ を論理式の集合とする.

$\pi(x)$ が A 上 divide するならば, ある $\Delta\subseteq_{\mathrm{fin}}\pi(x)$ が存在して $\varphi\equiv\bigwedge\Delta$ は A 上 divide する.

論理式の集合が divide しているとき, そこから有限個取ってきて dividing を考えれば良いことは以降よく使う.

命題 1.6. $A\subseteq B$ とし, $\varphi(x,b)$ が A 上 divide すると仮定する. このとき B の A-conjugate $\bar{B}$ が存在して $\varphi(x,b)$ は $\bar{B}$ 上 divide する.

証明. $I=(b_i)_{i\in\omega}$ を witness として取る. The Standard lemma で B-indiscernible $J=(c_i)_{i\in\omega}$ を $\mathrm{tp}(J/A)=\mathrm{tp}(I/A)$ となるように取る. 自己同型 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)\colon J\mapsto I$ を考えれば良い. □

例 1.7. DLO において, $\varphi(x,a,b)\equiv$ "$a<x<b$" divides over $\emptyset$ w.r.t. 2.

補題 1.8. $\pi(x,b)$ を論理式の集合とする. 次は同値.

1. $\pi(x,b)$ は A 上 divide する.
2. ある A-indiscernible $(b_i)_{i\in\omega}$ が存在して次を満たす.
   - $\mathrm{tp}(b_0/A)=\mathrm{tp}(b/A)$
   - $\bigcup_{i\in\omega}\pi(x,b_i)$ is inconsistent
3. ある A-indiscernible $(b_i)_{i\in\omega}$ が存在して次を満たす.
   - $b_0=b$
   - $\bigcup_{i\in\omega}\pi(x,b_i)$ is inconsistent

証明. $(1\to 2)$ $\pi(x,b)$ が $k\in\omega$ に関して A 上 divide すると仮定する. $\pi(x,b)$ から有限個取ってきて $\varphi(x,b)$ が $k\in\omega$ に関して A 上 divide するとして良い.

$(b_i)_{i\in\omega}$ を dividing の条件を満たすように取る. つまり

- $\mathrm{tp}(b_i/A)=\mathrm{tp}(b/A)$
- $\{\varphi(x,b_i)\mid i\in\omega\}$ is k-inconsistent

を満たすように取る. The Standard lemma より一般性を損なうことなく $(b_i)_{i\in\omega}$ は A-indiscernible として

[*6] 自由変数は y で揃えている.

良い.

このとき $\bigcup_{i\in\omega}\pi(x,b_i)$ は inconsistent.

$(2\to 1)$ A-indiscernible $(b_i)_{i\in\omega}$ を仮定の条件を満たすように取る. $\bigcup_{i\in\omega}\pi(x,b_i)$ は inconsistent より, $\pi(x,b)$ からその witness を有限個取りそれを $\varphi(x,b)$ とする. 取り方から $\Sigma(x)=\{\varphi(x,b_i)\mid i\in\omega\}$ は inconsitent. indiscernibility と compactness より $\Sigma(x)=\{\varphi(x,b_i)\mid i\in\omega\}$ は k-inconsistent.

$(3\to 2)$　良い.

$(2\to 3)$ 自己同型 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)\colon b_0\mapsto b$ を考えれば良い. □

系 1.9. 次は同値.

1. $\mathrm{tp}(a/Ab)$ は A 上 divide しない.
2. 任意の A-indiscernible I で b を含むものに対して, ある Aa-indiscernible J が存在して $\mathrm{tp}(J/Ab)=\mathrm{tp}(I/Ab)$ を満たす.
3. 任意の A-indiscernible I で b を含むものに対して, ある $\bar{a}$ が存在して $\mathrm{tp}(\bar{a}/Ab)=\mathrm{tp}(a/Ab)$ かつ I は $A\bar{a}$-indiscernible となる.
4. 任意の A-indiscernible I で b を含むものに対して, ある $\bar{a}$ と $A\bar{a}$-indiscernible J が存在して $\mathrm{tp}(\bar{a}/Ab)=\mathrm{tp}(a/Ab)$ かつ $\mathrm{tp}(I/Ab)=\mathrm{tp}(J/Ab)$ を満たす.

証明. $(2\to 3)$ A-indiscernible I で b を含むものを任意に取る. 仮定より Aa-indiscernible J で $\mathrm{tp}(J/Ab)=\mathrm{tp}(I/Ab)$ を満たすものを取る. 自己同型 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/Ab)\colon J\mapsto I$ を取り, $\bar{a}=\sigma(a)$ とする. このとき I は $A\bar{a}$-indiscernible かつ $\mathrm{tp}(\bar{a}/Ab)=\mathrm{tp}(a/Ab)$ を満たす.

$(3\to 2)$ A-indiscernible I で b を含むものを任意に取る. 仮定より $\bar{a}$ を $\mathrm{tp}(\bar{a}/Ab)=\mathrm{tp}(a/Ab)$ かつ I は $A\bar{a}$-indiscernible となるように取る. 自己同型 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/Ab)\colon\bar{a}\mapsto a$ となるように取り, $J=\sigma"I$ とする. このとき J は Aa-indiscernible かつ $\mathrm{tp}(I/Ab)=\mathrm{tp}(J/Ab)$ を満たす.

$(2,3\to 4)$ はい.

$(4\to 2,3)$ 今までのように自己同型で移す.

$(1\to 4)$ A-indiscernible I で b を含むものを任意に取る. $b_{i_0}=b$ とする. $p(x,y)=\mathrm{tp}(ab/A)$ とする.

$\mathrm{tp}(a/Ab)$ は A 上 divide しないことと前補題より $\bigcup_{i\in I}p(x,b_i)$ は consistent. よって $\bar{a}$ をその実現とする.

The Standard lemma を用いて $K=(c_i)_{i\in I}$ を $A\bar{a}$-indiscernible かつ K は $\mathrm{EM}(I/A\bar{a})$ を実現するように取る. $\models p(\bar{a},c_{i_0})$ より, 自己同型 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A\bar{a})\colon c_{i_0}\mapsto b$ を取る. $J=\sigma"K$ とすると $A\bar{a}$-indiscernible かつ $\mathrm{tp}(J/Ab)=\mathrm{tp}(I/Ab)$ を満たす.

$(2\to 1)$　$\mathrm{tp}(a/Ab)$ が A 上 divide すると仮定して矛盾を導く. $\pi(x,y)=\mathrm{tp}(ab/A)$ とする. 前補題より A-indiscernible $I=(b_i)_{i\in\omega}$ を $b_0=b$ かつ $\bigcup_{i\in\omega}\pi(x,b_i)$ は inconsistent となるように取る.

仮定よりある $\bar{a}$ が存在して $\mathrm{tp}(\bar{a}/Ab)=\mathrm{tp}(a/Ab)$ かつ I は $A\bar{a}$-indiscernible となる. $\models\mathrm{tp}(ab/A)[\bar{a},b]$ となり, indiscernibility から $\bigcup_{i\in\omega}\pi(\bar{a},b_i)$ は consistent. Contradiction. □

例 1.10. $a\notin\mathrm{acl}(A)$ とする. このとき $\mathrm{tp}(a/Aa)$ は A 上 divide する.

証明. $a\notin\mathrm{acl}(A)$ より a の A-conjugate $(a_i)_{i\in\omega}$ を取る.

$\varphi(x,a)\equiv"x=a"$ を考えると $\mathrm{tp}(a/A)=\mathrm{tp}(a_i/A)$ かつ $(\varphi(x,a_i))_{i\in\omega}$ は 2-inconsitent となる. □

例 1.11. $\pi(x)$ を $\mathrm{acl}(A)$ 上で定義された無矛盾な論理式の集合とする. このとき $\pi(x)$ は A 上 divide しない.

証明. $\pi(x)$ が A 上 divide すると仮定して矛盾を導く. $\pi(x)$ から有限個取ってきて $\varphi(x,b)$ divides over A として良い. このとき仮定より $b \in \mathrm{acl}(A)$ となる.

Dividing の witness を $(b_i)_{i\in\omega}$ を取る. The Standard lemma より $(b_i)_{i\in\omega}$ は A-indiscernible として良い. b は A 上代数的より, $\psi(x)$ を b を実現としてもつ A 上の algebraic formula とする. このとき全ての $i \in \omega$ に対して $\psi(x) \in \mathrm{tp}(b/A) = \mathrm{tp}(b_i/A)$ が成立する. $\psi(x)$ の取り方と indiscernibility から $b = b_i$ for all $i \in \omega$. よって $\varphi(x,b)$ は inconsistent となり, $\pi(x)$ の取り方に矛盾. $\square$

命題 1.12. $A \subseteq B$ とする. $\mathrm{tp}(a/B)$ が A 上 divide しないとし, $\mathrm{tp}(c/Ba)$ は Aa 上 divide しないと仮定する.
このとき $\mathrm{tp}(ac/B)$ は A 上 divide しない.

証明. b を B の元からなる finite tuple とする. I を infinite A-indiscernible で b を含むものとする.

$\mathrm{tp}(a/B)$ doesn't divide over A より, Aa-indiscernible J で $\mathrm{tp}(J/Ab) = \mathrm{tp}(I/Ab)$ を取る. このとき "$x = b$" $\in \mathrm{tp}(I/Ab) = \mathrm{tp}(J/Ab)$ より, J はまた b を含む.

また $\mathrm{tp}(c/Ba)$ doesn't divide over Aa より Aac-indiscernible K で $\mathrm{tp}(K/Aab) = \mathrm{tp}(J/Aab)$ を満たすものを取る. よって $\mathrm{tp}(ac/B)$ は A 上 divide しない. $\square$

Forking を定義する.

定義 1.13 (Forking)**.** $\pi(x)$ を論理式の集合とする. $\pi(x)$ が A 上 fork するとはある論理式 $\varphi_l(x)$ $(l < d \in \omega)$ が存在して次を満たすことをいう.

- $\pi(x) \models \bigvee_{l<d} \varphi_l(x)$
- $\varphi_l(x)$ は A 上 divide する

明らかに Dividing の方が Forking より強い. 逆は一般には成立しない[*7]が, あとで定義される simple theory ではこれらが一致する. [*8]

余談 1.

- Divide は「分かれる」という意味がある.
- Fork は「分岐する」という意味がある.

命題 1.14 (Non-forking is closed)**.** $p \in S(B)$ が A 上 fork すると仮定する.
このときある $\varphi \in p$ が存在して, 任意の $q \in S(B)$ に対して $\varphi \in q$ ならば q は A 上 fork する.

証明. $p \models \bigvee_{l<d} \varphi_l$ とすると compactness よりある $\pi \subseteq_{\mathrm{fin}} p$ が存在して $\pi \models \bigvee_{l<d} \varphi_l$ が成立する. $\varphi = \bigwedge \pi$ とすれば良い. $\square$

系 1.15. $p \in S(B)$ が A 上 fork すると仮定する. このときある $B_0 \subseteq_{\mathrm{fin}} B$ が存在して $p \upharpoonright AB_0$ は A 上 fork する. $\square$

補題 1.16. 論理式の集合 π は A で有限充足可能とする. このとき π は A 上 fork しない.

証明. そうではないと仮定して矛盾を導く. $\pi \models \bigvee_{l<d} \varphi_l(x)$ とする. このときある $l < d$ 存在して $\varphi_l(x)$ は A

---

*7 有理数上の cyclic order とか考えるとダメ.

*8 いい話.

での実現を持つ．これは $\varphi_l(x)$ が A 上 divide することに矛盾． $\square$

補題 1.17. $A \subseteq B$ とし, π を B 上の partial type とする．また π は A 上 fork しないと仮定する．
このとき π の拡張 $p \in S(B)$ が存在して p は A 上 fork しない．

証明. p を π を含む $L(B)$-論理式の集合で A 上 fork しないもので極大なものとすれば良い． $\square$

2 Simple theory

この章では断りのない限り T は可算完全で無限モデルを持つと仮定して議論する．

定義 2.1 (Simple)**.**

- 論理式 $\varphi(x,y)$ が k-TP[*9] を持つとはある $(a_s \mid \emptyset \neq in^{<\omega}\omega)$ が存在して次を満たすことをいう．
  1. 任意の $s \in {}^{<\omega}\omega$ について, $\{\varphi(x, a_{s^\frown\langle i\rangle}) \mid i \in \omega\}$ は k-inconsitent
  2. 任意の $\sigma \in {}^{\omega}\omega$ について, $\{\varphi(x, a_s) \mid \emptyset \neq s \sqsubset \sigma\}$ は consitent
- theory T が simple であるとは TP を持つ論理式が存在しないときのことをいう．

TP を考えるときはパラメタなしの論理式を考えれば十分である．totally transcendental なら simple である．

次の dividing sequence の概念は有用である．

定義 2.2. Δ をパラメタなし論理式の有限集合とする．δ を順序数とする．
このとき $(\varphi_i(x, a_i) \mid i < \delta)$ が A 上の Δ-k-dividing sequence であるとは次を満たすことをいう．

- $\varphi_i(x,y) \in \Delta$
- $\varphi_i(x, a_i)$ は k に関して $A \cup \{a_j \mid j < i\}$ 上 divide する
- $\{\varphi_i(x, a_i) \mid i < \delta\}$ は consistent

δ を dividing sequence の長さという．

Dividing sequence を使って TP を特徴付けることができる．

補題 2.3.

1. φ が k-TP を持つと仮定する．このとき任意の A と δ について, 長さ δ の A 上の φ-k-dividing sequence が存在する．
2. 長さが無限の $\emptyset$ 上の Δ-k-dividing sequence が存在すると仮定する．このときある $\varphi \in \Delta$ が存在して, φ は k-TP を持つ．

証明. (1) φ が k-TP を持つとする．δ が極限順序数のときのみ考えれば十分である．[*10]compactness から任意の $\kappa \in \mathrm{ON}$ について, $(a_s \mid \emptyset \neq s \in {}^{<\delta}\kappa)$ が存在して次を満たす．

[*9] tree property
[*10] 短くすればいい

- 任意の $s \in {}^{<\delta}\kappa$ について, $\{\varphi(x, a_{s^\frown\langle i\rangle}) \mid i < \kappa\}$ は k-inconsistent
- 任意の $\sigma \in {}^{\delta}\kappa$ について, $\{\varphi(x, a_s) \mid \emptyset \neq s \sqsubset \sigma\}$ は consitent

正則基数 κ を $\kappa > 2^{\max\{|T|,|A|,\delta\}}$ となるように十分大きく取る．infinite path $\sigma \in {}^{\delta}\kappa$ を全ての $s \sqsubset \sigma$ について, $A \cup \{a_t \mid t \sqsubseteq s\}$ 上の $a_{s^\frown\langle i\rangle}$ のタイプが等しくなるような $i < \kappa$ が無限個存在するように取る.

これは κ が十分大きいことから帰納的に構成すれば良い.

このような σ に対して, 構成より $(\varphi(x, a_{\sigma\upharpoonright i+1} \mid i < \delta))$ は A 上の φ-k-dividing sequence となる.[11]

(2) $(\varphi_i(x, a_i) \mid i \in \omega)$ を $\emptyset$ 上の Δ-k-dividing sequence とする．Δ は有限より $(\varphi(x, a_i) \mid i \in \omega)$ を $\emptyset$ 上の φ-k-dividing sequence として良い．φ が k-TP を持つことを示す.

各 $i \in \omega$ について, $(a_i^n)_{n\in\omega}$ を $\varphi(x, a_i)$ が k に関して $\{a_j \mid j < i\}$ 上 divide することの witness として取り固定する．つまり各 $i \in \omega$ について次が成立している.

- $\mathrm{tp}(a_i^n/\{a_j \mid j < i\}) = \mathrm{tp}(a_i/\{a_j \mid j < i\})$ for all $n \in \omega$
- $\{\varphi(x, a_i^n \mid n \in \omega\}$ は k-inconsistent

$(b_s \mid \emptyset \neq s \in {}^{<\omega}\omega)$ を次のように帰納的に構成する．$s \in {}^{i+1}\omega$ に対して, $\bar{b} = (b_{s\upharpoonright 1}, \ldots, b_{s\upharpoonright i})$ まで定義したとする．さらに $\mathrm{tp}(a_0, \ldots, a_{i-1}) = \mathrm{tp}(\bar{b})$ を満たすと仮定する．自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$: $(a_0, \ldots, a_{i-1}) \mapsto \bar{b}$ を取り, $b_s = \sigma(a_i^{s(i)})$ とする.

構成より $(b_s \mid \emptyset \neq s \in {}^{<\omega}\omega)$ は求めるものとなっている. □

命題 2.4. T を simple とする．Δ を論理式の有限集合, $k \in \omega$ とする.

このとき Δ-k-dividing sequence の長さは有限の上限を持つ.

証明. そうではないと仮定して矛盾を導く．長さ無限の $\emptyset$ 上の Δ-k-dividing sequence を構成する．$\Delta = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_l\}$ とする.

サイズの議論により $f \in {}^{\omega}\Delta$ を任意の $m \in \omega$ について $f \upharpoonright m$ の順で $\emptyset$ 上の Δ-k-dividing sequence が存在するように取る．[12]定数記号 c, $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ $(n \in \omega)$, $a_n^0, \ldots, a_n^i, \ldots$ $(n \in \omega, i \in \omega)$ を用意する．次の theory を考える．[13]

- T
- $\{\varphi_{f(n)}(c, a_n) \mid n \in \omega\}$
- $\mathrm{tp}(a_n^i/\{a_0, \ldots, a_{n-1}) = \mathrm{tp}(a_n/\{a_0, \ldots, a_{n-1})$ for each $n \in \omega$, $i \in \omega$
- $\{\varphi(x, a_n^i) \mid i \in \omega\}$ is k-inconsistent for each $n \in \omega$

これは仮定より有限充足可能．実際有限個取ってきたとき十分長い $f \upharpoonright m$ の順に論理式が並んだ $\emptyset$ 上の Δ-k-dividing sequence を取り解釈をそれに当てれば良い.[14]

よって compactness より欲しいものが得られる. □

命題 2.5. T は無限完全で無限モデルを持つ theory とする．次は同値.

[11] $i + 1$ で切っているところが効いている

[12] compactness を使いたいので dividing sequence に出てくる論理式をあらかじめ決めておく

[13] 長いので箇条書きで書いている

[14] このために f を取った

1. T は simple.
2. 任意の B と任意の $p \in S_n(B)$ についてある $A \subseteq B$ が存在して, $|A| \leq |T|$ かつ p は A 上 divide しない.
3. ある順序数 κ が存在して, 任意の $M \models T$ と任意の $p \in S_n(M)$ に対してある $A \in [M]^{\leq\kappa}$ が存在して, p は A 上 divide しない.

証明. $(2 \to 3)$ 良い.

$(1 \to 2)$ まず $p \in S_n(B)$ は B 上 divide しないことより $|B| > |T|$ のときを考えれば十分である.

そうではないと仮定して矛盾を導く. 仮定より B と $p \in S_n(B)$ を取る. 帰納的に列 $(\varphi_i(x, b_i))_{i<|T|^+}$ を次のように構成する.

- 各 φ_i は p に属す論理式
- $\varphi_i(x, b_i)$ は k に関して $\{b_j \mid j < i\}$ 上 divide する
- $b_i \in B$

$\varphi_i(x, y)$ 全体のサイズは $|T|$ 以下より, φ-k-dividing sequence $(\varphi(x, b_i))_{i<|T|^+}$ が取れる. これは T が simple であることに矛盾.

$(3 \to 1)$　対偶を示す. 任意に順序数 κ を取る. T は simple でないから長さ κ^+ の φ-k-dividing sequence $(\varphi(x, b_i))_{i<\kappa^+}$ を取る.

次を満たすような T のモデルの列を取る.

- $M_0 \prec M_1 \prec \dots$
- 任意の $j < i$ について, $b_j \in M_i$
- $\phi(x, b_i)$ は M_i 上 divide する

これは命題 1.6. を使うことで取れる. $M = \lim M_i \models T$ とする. サイズ κ の部分集合はどこかの M_i で捕まっているのでこれは 3 を満たさない. □

命題 2.6. T を simple とし, $p \in S(A)$ とする. このとき p は A 上 fork しない.

証明. p は A 上 fork すると仮定する. $p \models \bigvee_{l<d} \varphi_l(x, b)$ とする. $\Delta = \{\varphi_l(x, y) \mid l < d\}$ とおく.

$n \in \omega$ の帰納法で長さ n の A 上の Δ-k-dividing sequence を構成する. さらに dividing sequence は p と consistent となるように構成する.

$(\psi_i(x, a_i))_{i<n}$ まで構成したとする. $\bar{b}$ を b の A-conjugate で $(\psi_i(x, a_i))_{i<n}$ が $A\bar{b}$ 上の dividing sequence となるように取る. このとき $p \models \bigvee_{l<d} \varphi_l(x, \bar{b})$ より, $\varphi_l(x, \bar{b})$ を $p \cup \{\psi_i(x, a_i) \mid i < n\}$ となるように取る.

$\varphi_l(x, \bar{b}), \psi_0(x, a_0), \dots, \psi_{n-1}(x, a_{n-1})$ は A 上の Δ-k-dividing sequence で p と consistent となる. [*15]

これは T が simple であることに矛盾. □

定義 2.7. p を A 上のタイプとする. p の拡大 q が A 上 fork しているとき forking extension という.

系 2.8. $A \subseteq B$ とし, T を simple とする. 任意の A 上のタイプは B 上のタイプへの non-forking extension を持つ. □

[*15] 先頭にくっつけるのが大事

定義 2.9. $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_C B$[*16]とは, 任意の $\bar{a} \in [A]^{<\omega}$ について $\mathrm{tp}(\bar{a}/BC)$ は C 上 fork しないときのことをいう.

定義 2.10. I を全順序, $\bar{a} = (a_i)_{i \in I}$ を列とする.

- $\bar{a}$ が A 上 independent とは, 全ての $i \in I$ について $a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_A \{a_j \mid j < i\}$ を満たすときのことをいう.
- $\bar{a}$ が A 上の Morley sequence とは, $\bar{a}$ が A 上 independent かつ A-indiscernible であることをいう.
- $\bar{a}$ が A 上の Morley sequence in p とは, $\bar{a}$ が A 上の Morley sequence かつ p の実現からなる列であるときをいう.

命題 2.11. M をモデルとし, $A \subseteq M$ とする. p を M 上のタイプとする. また M は $|A|^+$-saturated と仮定する. このとき p が A 上 fork することと A 上 divide することは同値.

証明. p が A 上 fork すると仮定する. このときある $\varphi(x, m) \in p$ が存在して, $\varphi(x, m) \models \bigvee_{l<d} \varphi_l(x, b)$ となる.

$\mathrm{tp}(b/Am)$ の解を $\bar{b} \in M$ とする. このときある $\varphi_l(x, \bar{b}) \in p$ となり, p は A 上 divide する. □

命題 2.12. q を A-invariant global type[*17]とする. このとき q は A 上 fork しない.

証明. q が A 上 fork しないことを示せば良い. $\varphi(x, b) \in q$ を dividing formula とする. $(b_i)_{i \in \omega}$ をその witness とする. q は A-invariant より, 各 $i \in \omega$ について $\varphi(x, b_i) \in q$ となり矛盾. よって q は A 上 divide しない. □

例 2.13. q を A-invariant global type とする. 列 $(b_i)_{i \in \omega}$ を各 b_i が $q \restriction A \cup \{b_j \mid j < i\}$ を実現するように取る. このとき $(b_i)_{i \in \omega}$ は A 上の Morley sequence.

証明. 仮定の条件を満たす列を good ということにする. good な列の部分列はまた good となる.

まず indiscernibility を示す. good な列 $(a_0, \ldots, a_n)$ と $(b_0, \ldots, b_n)$ に対して $\mathrm{tp}(a_0, \ldots, a_n/A) = \mathrm{tp}(b_0, \ldots, b_n/A)$ を示せば良い. $n \in \omega$ についての帰納法で示す.

$\mathrm{tp}(a_0, \ldots, a_{n-1}/A) = \mathrm{tp}(b_0, \ldots, b_{n-1}/A)$ を仮定する. 自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)\colon (a_0, \ldots, a_{n-1}) \mapsto (b_0, \ldots, b_{n-1})$ を取る. このとき $\sigma(\mathrm{tp}(a_n/A \cup \{a_0, \ldots, a_{n-1}\})) = \mathrm{tp}(b_n/A \cup \{b_0, \ldots, b_{n-1}\})$ が成立することから良い.

次に independence を示す. これは q が A 上 fork しないことから良い. □

命題 2.14. $(a_i)_{i \in I}$ を A 上 independent な列とする. $J, K \subseteq I$ を $J < K$ を満たすとする. [*18]このとき $\mathrm{tp}((a_k)_{k \in K}/A \cup \{a_j \mid j \in J\})$ は A 上 divide しない.

証明. K が有限のときに示せば十分である. K のサイズの帰納法で示す.

$K = \{k_0 < \cdots < k_n\}$ とする. $a_{k_0} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_A \{a_i \mid i < k_0\}$ より, $\mathrm{tp}(a_{k_0}/A \cup \{a_j \mid j \in J\})$ は A 上 fork しない, よって A 上 divide しない. また帰納法の仮定より, $\mathrm{tp}((a_{k_1}, \ldots, a_{k_n})/A \cup \{a_j \mid j \in J\} \cup \{a_{k_0}\})$ は A 上 divide しない.

よって命題 1.12 より $\mathrm{tp}((a_{k_0}, \ldots, a_{k_n})/A \cup \{a_j \mid j \in J\})$ は A 上 divide しない. □

[*16] A is independent form B over C という
[*17] $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ で不変なもの
[*18] $\forall a \in J \forall b \in K (a < b)$ のこと

定義 2.15. μ を無限基数とする.

$$\beth_\alpha(\mu) = \begin{cases} \mu & (\alpha = 0) \\ 2^{\beth_\beta(\mu)} & (\alpha = \beta + 1) \\ \sup_{\beta<\alpha} \beth_\beta(\mu) & (\alpha\colon \mathit{limit}) \end{cases}$$

と定義する.

定理 2.16 (Erdös-Rado)**.** $\beth_n^+(\mu) \to (\mu^+)_\mu^{n+1}$

証明. $n \in \omega$ についての帰納法で示す. $n = 0$ の時は明らかなので良い.

$n + 1$ のときを示す. 分割 $f\colon [\beth_{n+1}^+(\mu)]^{n+2} \to \mu$ を任意に取る. 十分大きな正則基数 Ξ を

$$\{f, \beth_{n+1}^+(\mu)\} \cup \mu \subseteq H_\Xi$$

となるように取る. $M \prec H_\Xi$ を次を満たすように取る.

- $\{f, \beth_{n+1}^+(\mu)\} \cup \mu \subseteq M$
- $[M]^{<\beth_n^+(\mu)} \subseteq M$
- $|M| = \beth_{n+1}(\mu)$

$\alpha = \sup(\beth_{n+1}^+(\mu) \cap M) < \beth_{n+1}^+(\mu)$ とする.

列 $\langle \beta_\xi \in \beth_{n+1}^+(\mu) \cap M \mid \xi < \beth_n^+(\mu) \rangle$ を各 $\xi < \beth_n^+$ に対して次を満たすように帰納的に構成する.

- 全ての $\zeta < \xi$ に対して, $\beta_\zeta < \beta_\xi$
- 全ての $\zeta_0, \ldots, \zeta_n < \xi$ に対して, $f(\beta_{\zeta_0}, \ldots, \beta_{\zeta_n}, \beta_\xi) = f(\beta_{\zeta_0}, \ldots, \beta_{\zeta_n}, \alpha)$

ξ まで構成したとする. $E = \{\beta_\zeta \mid \zeta < \xi\} \subseteq \beth_{n+1}^+(\mu) \cap M$ とする. $g\colon [E]^{n+1} \to \mu$ を $g(x) = f(x \cup \{\alpha\})$ と定義する. このとき $g \in M$ となる. [*19]

α の取り方より,

$$H_\Xi \models \exists x < \beth_{n+1}^+(\mu)[\forall y \in E(y < x) \wedge \forall z \in [E]^{n+1}(g(z) = f(z \cup \{x\}))]$$

が成立するので初等性から M での witness を β_ξ とすれば良い.

$Z = \{\beta_\xi \mid \xi < \beth_n^+(\mu)\}$ とおく. $h\colon [Z]^{n+1} \to \mu$ を $h(x) = f(x \cup \{\alpha\})$ と定義する. 帰納法の仮定より $H \in [Z]^{\mu^+}$ を $|h\text{''}[H]^{n+1}| = 1$ を満たすようにとる. 構成より H は分割 f に対して homogeneous となる. □

命題 2.17. 任意の A に対してある無限基数 λ が存在して, 任意のサイズ λ の全順序集合で添字づけられた列 $(a_i)_{i\in I}$ に対して, ある A-indiscernible $(b_i)_{i\in\omega}$ が存在して次を満たす.

任意の $j_1 < \cdots < j_n \in \omega$ に対して, ある $i_1 < \cdots < i_n \in I$ が存在して,

$$\mathrm{tp}((a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})/A) = \mathrm{tp}((b_{j_1}, \ldots, b_{j_n})/A)$$

が成立する.

証明. $\tau = \sup_{n\in\omega} |\mathrm{S}_n(A)|$ とする. $\lambda = \beth_{\tau^+}(\aleph_0)$ とすると Erdös-Rado より次が成立する.

[*19] M の closure から明らか

- $\mathrm{cf}(\lambda) > \tau$
- 任意の $\kappa < \lambda$ と任意の $n \in \omega$ に対してある $\delta < \lambda$ が存在して, $\delta \to (\kappa)^n_\tau$ が成立する

タイプの列 $p_1(x_1) \subseteq p_2(x_1, x_2) \subseteq \dots$ で次を満たすものを n に関する帰納法で構成する.

- $p_n \in \mathrm{S}_n(A)$
- 任意の $\kappa < \lambda$ に対してある $J \in [I]^\kappa$ が存在して, 任意の $i_1 < \dots < i_n \in J$ に対して $\mathrm{tp}((a_{i_1}, \dots, a_{i_n})/A) = p_n$ が成立する

$(b_i)_{i\in\omega}$ を $\bigcup_{n\in\omega} p_n$ の実現として取れば A-indiscernible となり欲しいものとなっている.

p_{n-1} まで構成したとする. $\kappa < \lambda$ を任意に取る. $\delta < \lambda$ を $\delta \to (\kappa)^n_\tau$ を満たすように取る. また構成より $J \in [I]^\delta$ を任意の $i_1 < \dots < i_{n-1} \in J$ に対して $\mathrm{tp}((a_{i_1}, \dots, a_{i_{n-1}})/A) = p_{n-1}$ が成立するように取る. $\delta \to (\kappa)^n_\tau$ を用いて, $K \in [J]^\kappa$ と p^κ_n を任意の $i_1 < \dots < i_n \in K$ に対して $\mathrm{tp}((a_{i_1}, \dots, a_{i_n})/A) = p^\kappa_n$ が成立するように取る. このとき $\tau < \mathrm{cf}(\lambda)$ より, ある p が存在して cofinally many な κ について $p = p^\kappa_n$ が成立する. この p を p_n として取れば良い. □

補題 2.18. $p \in \mathrm{S}(B)$ は A 上 fork しないと仮定する. このとき長さが無限の A 上の Morley sequence in p で B-indiscernible となるものが存在する.

特に T が simple のとき任意の $p \in \mathrm{S}(A)$ に対して, 長さが無限の A 上の Morley sequence in p が存在する.

証明. non-forking extension を取ることによって一般性を損なうことなく $A \subseteq B$ と仮定して良い.

a_0 を $p_0 = p$ の実現として取る, $p_1 \in \mathrm{S}(Ba_0)$ を p_0 の non-forking extension とし, p_1 を p_1 の実現として取る. この操作を繰り返すことによって任意の $\lambda \in \mathrm{ON}$ に対して $(a_i)_{i<\lambda}$ を $a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A B\{a_j \mid j < i\}$ を満たすように取れる. 命題 2.17 より B-indiscernible $(b_j)_{j\in\omega}$ を取る. これは条件を満たすものになっている. □

補題 2.19. T を simple とする. $\pi(x, y)$ を A 上のタイプとする. $(b_i)_{i\in\omega}$ を A 上の Morley sequence とし, $\bigcup_{i\in\omega} \pi(x, b_i)$ は consistent と仮定する. このとき $\pi(x, b_0)$ は A 上 divide しない.

証明. the Standard lemma より任意の全順序 I について, A 上の Morley sequence in $\mathrm{tp}(b_0/A)$ で $\Sigma(x) = \bigcup_{i\in I} \pi(x, b_i)$ が consistent となるものが取れる.

I を $|T|^+$ の逆順序として取る. $\Sigma(x)$ の実現を c とする. 命題 2.5 より i_0 を $\mathrm{tp}(c/A \cup \{b_i \mid i \in I)$ が $A \cup \{b_j \mid j > i_0\}$ 上 divide しないように取る. 命題 2.14 より, $\mathrm{tp}(\{b_i \mid i > i_0\}/Ab_{i_0})$ は A 上 divide しない. 命題 1.12 より $\mathrm{tp}(c \cup \{b_i \mid i > i_0\}/Ab_{i_0})$ は A 上 divide しない. よって $\pi(x, b_{i_0})$ は A 上 divide しない. b_{i_0} は $\mathrm{tp}(b_0/A)$ の実現より, $\pi(x, b_0)$ は A 上 divide しない. □

以下, Simple theory において良い性質が成り立つことを示す.

命題 2.20. T を simple とする. このとき $\pi(x, b)$ が A 上 divide することと A 上 fork することは同値.

証明. $\pi(x, b)$ は A 上 divide しないと仮定する. $\pi(x, b) \models \bigvee_{l<d} \varphi_l(x, b) = \psi(x, b)$ とする.

Simplicity より $(b_i)_{i\in\omega}$ を A 上の Morley sequence in $\mathrm{tp}(b/A)$ とする. $\pi(x, b)$ は A 上 dvide しないことから $\{\psi(x, b_i) \mid i \in \omega\}$ は consistent となる. よってある無限部分集合 $I \subseteq \omega$ が存在して $\{\varphi_l(x, b_i) \mid i \in I\}$ は consistent となる. 補題 2.19 より $\varphi_l(x, b)$ は A 上 divide しない. よって $\pi(x, b)$ は A 上 fork しない. □

命題 2.21 (Symmetry)**.** T を simple とする. このとき $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_C B$ と $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_C A$ は同値.

証明. $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C B$ を仮定する．任意の $a \in [A]^{<\omega}$ と $b \in [B]^{<\omega}$ に対して, $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C a$ を示せば十分である．仮定より $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C b$ が成立し, 命題 2.18 より, $(a_i)_{i\in\omega}$ を C 上の Morley sequence in $\mathrm{tp}(a/bC)$ かつ bC-indiscernible を満たすものとしてとる．$p(x,y) = \mathrm{tp}(ab/C)$ とする．このとき $\bigcup_{i\in\omega} p(a_i, y)$ は consistent．よって補題 2.19 より, $p(a,y)$ は C 上 divide しない． □

系 2.22. T を simple とする．$B \subseteq C \subseteq D$ とする．このとき

$$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B D \leftrightarrow A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B C \wedge A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C D$$

が成立する．[*20]

証明. $(\rightarrow)$　定義より明らか, これは T を simple でなくても成立する．

$(\leftarrow)$ これは命題 1.12 の言い換えである． □

系 2.23. 列 $(a_i)_{i\in I}$ が A 上 independent であることは I の順序によらない．

証明. $i \in I$ を任意に取る．$J, K \subseteq I$ を $J < K$ となるように任意に取る．

$a_J = \{a_j \mid j \in J\}$, $a_K = \{a_j \mid j \in K\}$ とおく．$a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A a_J a_K$ を示す．

命題 2.14 より $a_K \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A a_J a_i$ が成立する．特に $a_K \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A A a_J a_i$ が成立し, Monotonicity より $a_K \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{Aa_J} A a_J a_i$ が成立し $a_K \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{Aa_J} a_i$ が成立する．Symmetry より $a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{Aa_J} a_K$ が成立する．また independence より $a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A a_J$ が成立し, Transitivity より $a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A a_J a_K$ が成立する． □

補題 2.24. T を simple とする．I を A 上の長さ無限の Morley sequence とする．

このとき I が Ac-indiscernible ならば $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A I$ が成立する．

証明. 一般性を損なうことなく $I = (a_i)_{i\in\omega}$ として良い．$\varphi(x, a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathrm{tp}(c/AI)$ を任意に取る．$b_i = (a_{ni}, \ldots, a_{ni-i+1})$ とすると命題 2.14 から $(b_i)_{i\in\omega}$ は A 上の Morley sequence となる．また取り方より $\{\varphi(x, b_i) \mid i \in \omega\}$ は consistent．よって補題 2.19 より $\varphi(x, b_0)$ は A 上 divide しない． □

3 The independence theorem

この章では Independence theorem を証明する．また Kim-Pillay による Simple theory の特徴付けを証明する．そのあと Kim-Pillay を用いていくつか Simple theory の具体例を挙げる．

特に断りのない限り T は Simple と仮定する．任意の theory で成り立つ命題はそのことを明記する．

定義 3.1. A を集合とする．$\mathrm{nc}_A(a,b)$ とはある A-indiscernible $(c_i)_{i\in\omega}$ が存在して $c_0 = a$, $c_1 = b$ を満たすときのことをいう．

定義 3.2. 論理式 $\varphi(x,y)$ が thick であるとは全ての $i < j \in \omega$ について, $\models \neg\varphi(c_i, c_j)$ を満たすような列 $(c_i)_{i\in\omega}$ が存在しないときのことをいう．

条件に現れる列のことを antichain と呼ぶ．compactness より thick な論理式に対しては antichain の長さには有限の上界があることがわかる．次の命題より nc は type-definable であることがわかる．

[*20] $\leftarrow$ を Transitivity, $\rightarrow$ を Monotonicity という．

命題 3.3 (T は任意)**.** A を集合, a, b を有限 tuple とする. 次は同値.

1. $\mathrm{nc}_A(a,b)$
2. 任意の thick L(A)-論理式 $\varphi(x,y)$ に対して $\models \varphi(a,b)$ が成立する.

証明. $p(x,y)=\mathrm{tp}(ab/A)$ とする. the Standard lemma より $\mathrm{nc}_A(a,b)$ はある列 $(c_i)_{i\in\omega}$ が存在して, 任意の $i<j\in\omega$ に対して $\models p(c_i,c_j)$ であることは同値である. また compactness よりこれは任意の $\varphi\in p$ に対して, ある列 $(c_i)_{i\in\omega}$ が存在して, 任意の $i<j\in\omega$ に対して $\models\varphi(c_i,c_j)$ であることと同値である. □

命題 3.4 (T は任意)**.** 任意の thick な論理式 $\varphi(x,y)$ に対して, ある symmetric[*21]かつ thick な論理式 $\psi(x,y)$ が存在して $\models \forall x\forall y(\psi(x,y)\to\psi(x,y))$ が成立する.

証明. thick な論理式は $\wedge$ で閉じていることは定義から明らか. compactness より順序型 ω で列が取れたとき任意の全順序に拡張することができるから ω の逆順序を考えることによって $\varphi(x,y)$ が thick なとき, $\psi(x,y)\equiv\varphi(y,x)$ は thick となる.

よって thick な論理式 $\varphi(x,y)$ に対して, $\theta(x,y)\equiv\varphi(x,y)\wedge\varphi(y,x)$ は求めるものとなる. □

命題 3.5 (T は任意)**.** a, b はモデル M 上で同じタイプを持っているとする. このときある c が存在して $\mathrm{nc}_M(a,c)$ かつ $\mathrm{nc}_M(c,b)$ が成立する.

証明. thick なら論理式は $\wedge$ で閉じていることから compactness より任意の symmetric かつ thick な L(M)-論理式 $\varphi(x,y)$ について $\models\exists z(\varphi(a,z)\wedge\varphi(b,z))$ を示せば良い.

φ は thick かつ $M\models T$ より maximal antichain $a_0,\dots,a_{n-1}$ が M の中で取れる. このとき極大性よりある a_i が存在して $\models\varphi(a,a_i)$ を満たす. a, b はモデル M 上で同じタイプを持っていることから $\models\varphi(b,a_i)$ が成立する. □

命題 3.6 (T は任意)**.** $(b_i)_{i\in\omega}$ を A-indiscernible とする. また $(b_i)_{1\le i\in\omega}$ は Aa_0b_0-indiscernible であるとする. このときある a_1 が存在して $\mathrm{nc}_A(a_0b_0,a_1b_1,)$ が成立する.

証明. 自己同型で移すことで a_i を $\mathrm{tp}(a_0b_0b_1\dots/A)=\mathrm{tp}(a_ib_ib_{i+1}\dots/A)$ を満たすように取る.

the Standard lemma を使って自己同型で移すことで A-indiscernible $(c_ib_i)_{i\in\omega}$ で $(a_ib_i)_{i\in\omega}$ 上の EM-type を実現するものを取る. a_i の取り方と $(b_i)_{1\le i\in\omega}$ は Aa_0b_0-indiscernible であることから任意の $i_1<\dots<i_n\in\omega$ について $\mathrm{tp}(c_{i_1}b_{i_1}b_{i_2}\dots b_{i_n}/A)=\mathrm{tp}(a_0b_0b_1\dots b_{n-1}/A)$ が成立する.

よって $\mathrm{tp}(c_0b_0b_1\dots/A)\mathrm{tp}(a_0b_0b_1\dots/A)$ が成立する. あとは自己同型で移して a_1 を取れば良い. □

補題 3.7. $\mathcal{I}=(a_i)_{i\in I}$ を A-indiscernible とし, $\mathcal{J}=(a_j)_{j\in J}$ を $\mathcal{I}$ の initial segment で最大元を持たないとする. [*22]このとき $\mathcal{I}\setminus\mathcal{J}$ は $A\mathcal{J}$ 上の Morley sequence となる.

証明. independence を示せば良い. 任意の $i\in\mathcal{I}\setminus\mathcal{J}$ と任意の $X\in[\mathcal{I}\setminus\mathcal{J}]^{<\omega}$ で $X<i$ を満たすものについて $a_i\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A\mathcal{J}}a_X=\{a_k\mid k\in X\}$ を示せば十分. $\mathcal{J}$ は最大限を持たないことより indiscernibility よりずらすことで $\mathrm{tp}(a_X/A\mathcal{J}a_i)$ は $A\mathcal{J}$ で有限充足可能より, $A\mathcal{J}$ 上で fork しない. □

命題 3.8. $\varphi(x,a)$ は A 上 fork しないとし, $\mathrm{nc}_A(a,b)$ と仮定する. このとき $\varphi(x,a)\wedge\varphi(x,b)$ は A 上 fork し

*21 $\varphi(a,b)$ と $\varphi(b,a)$ が同値

*22 適宜順序は逆転させてください.

ない．

証明． $\mathrm{nc}_A(a,b)$ かつ the Standard lemma より A-indiscernible $\mathcal{J} \sqcup \mathcal{I}$ を $a,b \in \mathcal{I}$, $a<b$ かつ $\mathcal{J}$ は最大元を持たないように取る．$\varphi(x,a)$ の non-forking extension を取ることによって c を $\varphi(x,a)$ の実現で $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A \mathcal{J}a$ を満たすように取る．系 1.9 より $\mathcal{I}$ は $A\mathcal{J}c$-indiscernible としても良い．補題 3.7 より I は $A\mathcal{J}$ 上の Morley sequence となる．補題 2.24 より $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{A\mathcal{J}} \mathcal{I}$ が成立する．Transitivity より $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A \mathcal{J}\mathcal{I}$ が成立する．c は $\varphi(x,b)$ の実現でもあるから $\varphi(x,a) \wedge \varphi(x,b)$ は A 上 fork しない．□

命題 3.9. $\mathrm{nc}_A(b_0,b_1)$ かつ $a_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{Ab_0} b_1$ と仮定する．このときある a_1 が存在して $\mathrm{nc}_A(a_0b_0,a_1b_1)$ が成立する．

証明． $\mathrm{nc}_A(b_0,b_1)$ より A-indiscernible $(b_i)_{i\in\omega}$ を取る．$\mathrm{tp}(a_0/Ab_0b_1)$ は Ab_0 上 divide しないので系 1.9 より，$(b_i)_{a\leq i\in\omega}$ は Aa_0b_0-indiscernible としても良い．命題 3.6 より良い．□

命題 3.10. $\varphi(x,a_0) \wedge \psi(x,b_0)$ は A 上 fork しないとし，$\mathrm{nc}_A(b_0,b_1)$ かつ $a_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{Ab_0} b_1$ を仮定する．このとき $\varphi(x,a_0) \wedge \psi(x,b_1)$ は A 上 fork しない．

証明． 命題 3.9 より a_1 を $\mathrm{nc}_A(a_0b_0,a_1b_1)$ を満たすように取る．命題 3.8 より $\varphi(x,a_0) \wedge \psi(x,b_1)$ は A 上 fork しない．□

命題 3.11. $\varphi(x,a_0) \wedge \psi(x,b_0)$ は A 上 fork しないとし，$a_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A b_0b_1$ かつ b_0 と b_1 はある A を含むモデル M 上で同じタイプを持つと仮定する．このとき $\varphi(x,a_0) \wedge \psi(x,b_1)$ は A 上 fork しない．

証明． 命題 3.5 より c を $\mathrm{nc}_A(b_0,c)$ かつ $\mathrm{nc}_A(c,b_1)$ を満たすように取る．$\mathrm{tp}(a_0/Ab_0b_1)$ は A 上 fork しないことから non-forking extension を取り，その実現を取ることによって $a_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A b_0b_1c$ として良い．[*23] $\varphi(x,a_0) \wedge \psi(x,b_0)$ は A 上 fork せず，$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{Ab_0} c$ かつ $\mathrm{nc}_A(b_0,c)$ より命題 3.10 から $\varphi(x,a_0) \wedge \psi(x,c)$ は A 上 fork しない．また $\mathrm{nc}_A(c,b_1)$ かつ $a_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{Ac} b_1$ より命題 3.10 より $\varphi(x,a_0) \wedge \psi(x,b_1)$ は A 上 fork しない．□

命題 3.12. $M \models T$ とし，$\varphi(x,y)$ と $\psi(x,y)$ を $\mathrm{L}(M)$-論理式とする．次を仮定する．

- $a_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_M b_0$, $a_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_M a_0$, $b_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_M b_0$
- $\models \varphi(a_1,a_0) \wedge \psi(b_1,b_0)$
- $\mathrm{tp}(a_1/M) = \mathrm{tp}(b_1/M)$

このとき $\varphi(x,a) \wedge \psi(x,b)$ は M 上 fork しない．

証明． 自己同型で移し，non-forking extension の実現を取ることによって a_2 を $\mathrm{tp}(a_2a_1/M) = \mathrm{tp}(b_0b_1/M)$ かつ $a_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_M a_0a_1b_0b_1$ を満たすように取る．今 T は Simple より independence は順序によらないことに注意する．$a_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_M a_0a_1$ かつ $a_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_M a_0$ より $a_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_M a_0a_2$ が成立する．同様に $a_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_M a_0b_0$ かつ $a_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_M b_0$ より $a_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_M a_2b_0$ が成立する．$\models \psi(b_1,b_0)$ より，$\models \psi(a_1,a_2)$ が成立する．また $\varphi(x,a_0) \wedge \psi(x,a_2) \in \mathrm{tp}(a_1/Ma_0a_2)$ は M 上 fork しない．

よって $\varphi(x,a_0) \wedge \psi(x,a_2)$ は M 上 fork せず，$a_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_M a_2b_0$ かつ $\mathrm{tp}(b_0/M) = \mathrm{tp}(a_2/M)$ が成立することより命題 3.11 より，$\varphi(x,a) \wedge \psi(x,b)$ は M 上 fork しない．□

[*23] 自己同型で移せば良いので forking は保たれる．このような取り替えは今後もよくやるが，適切な自己同型で移して forking を保っているので一般性を損なわないことに注意する．

定理 3.13 (Independence theorem)**.** b, c はモデル M 上で同じタイプを持つとする.

$$B \mathop{\downarrow}_M C, b \mathop{\downarrow}_M B, c \mathop{\downarrow}_M C$$

が成立すると仮定する. このときある d が存在して次が成立する.

- $\mathrm{tp}(d/B) = \mathrm{tp}(b/B)$
- $\mathrm{tp}(d/C) = \mathrm{tp}(c/C)$
- $d \mathop{\downarrow}_M BC$

証明. T は Simple より dividing と forking は同値であるから, 命題 3.12 より $\mathrm{tp}(b/MB) \cup \mathrm{tp}(c/MC)$ は M 上 fork しない. non-forking extension $p \in \mathrm{S}(MBC)$ を取り, その実現を d とすれば良い. □

Simple theory において $\mathop{\downarrow}$ は次の性質を持つことをこれまで示してきた.

1. (Monotonicity and Transitivity) $a \mathop{\downarrow}_A BC$ と $a \mathop{\downarrow}_A B$ かつ $a \mathop{\downarrow}_{AB} C$ は同値.
2. (Symmetry) $a \mathop{\downarrow}_A b$ と $b \mathop{\downarrow}_A a$ は同値.
3. (Finite character) 任意の $b \in [B]^{<\omega}$ について $a \mathop{\downarrow}_A b$ ならば $a \mathop{\downarrow}_A B$ が成立する.
4. (Local character) ある無限基数 κ が存在して, 任意の a と B に対してある $B_0 \in [B]^{<\kappa}$ が存在して $a \mathop{\downarrow}_{B_0} B$ が成立する.
5. (Existence) 任意の a, A, C に対して, ある b が存在して $\mathrm{tp}(a/A) = \mathrm{tp}(b/A)$ かつ $b \mathop{\downarrow}_A C$ が成立する.
6. (Independence over models) 任意の $M \models T$ と $\mathrm{tp}(a_1/M) = \mathrm{tp}(b_1/M)$ かつ

$$a_0 \mathop{\downarrow}_M b_0, a_1 \mathop{\downarrow}_M a_0, b_1 \mathop{\downarrow}_M b_0$$

を満たすものに対して, ある c が存在して次を満たす.
   - $\mathrm{tp}(c/Ma_0) = \mathrm{tp}(a_1/Ma_0)$
   - $\mathrm{tp}(c/Mb_0) = \mathrm{tp}(b_1/Mb_0)$
   - $c \mathop{\downarrow}_M a_0 b_0$

実はこれが Simple theory を特徴付ける.

定理 3.14 (Kim-Pillay)**.** T を完全な理論とする. $\mathop{\downarrow}^0$ を有限 tuple a と集合 A, B の関係に対して定義された $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$ で不変かつ, 上の 6 つの性質を満たすものとする. このとき T は Simple かつ $\mathop{\downarrow}^0 = \mathop{\downarrow}$ が成立する.

証明. 後続を取ることで κ は正則基数と仮定してよい. まず $a \mathop{\downarrow}^0_A b$ を仮定して $\mathrm{tp}(a/Ab)$ が A 上 divide しないことを示す. 補題 1.8 を使う. $(b_i)_{i\in\omega}$ を A-indiscernible で $b_0 = b$ となるものを任意に取る.

主張 1. ある $M \models T$ が存在して次を満たす.

- $A \subseteq M$
- $(b_i)_{i\in\omega}$ は M-indiscernible
- $b_i \mathop{\downarrow}^0_M \{b_j \mid j < i\}$

proof of claim1. the Standard lemma を使って自己同型で移すことより $(b_i)_{i\in\omega}$ を $(b_i)_{i\leq\kappa}$ に延長する. 次のようなモデルの長さ κ の昇鎖 $A \subseteq M_0 \prec M_1 \prec \dots$ を構成する.

- 任意の $i < \kappa$ について, $\{b_j \mid j < i\} \subseteq M$ が成立する.

- $(b_j)_{i\le j\le\kappa}$ は M_i-indiscernible.

これは the Standard lemma を使い自己同型で移すことで帰納的に構成することができる.

b_κ と $M_\kappa=\bigcup_{\xi<\kappa}M_\xi$ に対して Local character を用いることで $S\in[M_\kappa]^{<\kappa}$ を $b_\kappa \mathop{\downarrow}^0_S M_\kappa$ を満たすように取る. $S\subseteq M_{i_0}$ となる最小の i_0 を取る. Monotonicity より, $b_\kappa \mathop{\downarrow}^0_S M_{i_0}\cup\{b_j\mid i_0\le j<\kappa\}$ が成立する. 再び Monotonicity より $b_\kappa \mathop{\downarrow}^0_{M_{i_0}} \{b_j\mid i_0\le j<\kappa\}$ が成立する.

このとき任意の $i<\kappa$ について, $b_i \mathop{\downarrow}^0_{M_{i_0}} \{b_j\mid i_0\le j<i\}$ が成立する.

($\because$ 任意に $i<\kappa$ を取る. 任意に $\bar b\in[\{b_j\mid i_0\le j<i\}]^{<\omega}$ を取る. Finite character より $b_i \mathop{\downarrow}^0_{M_{i_0}} \bar b$ を言えば良い. Monotonicity より $b_\kappa \mathop{\downarrow}^0_{M_{i_0}} \bar b$ が成立する. $(b_j)_{i_0\le j\le\kappa}$ は M_{i_0}-indiscernible より $\mathrm{tp}(\bar b b_\kappa/M_{i_0})=\mathrm{tp}(\bar b b_i/M_{i_0})$ が成立する. 自己同型で移すことで $b_i \mathop{\downarrow}^0_{M_{i_0}} \bar b$ が成立する.)

M_{i_0} と $(b_{i_0+n})_{n\in\omega}$ を考え, 自己同型で移せば良い. $\dashv$ claim1

主張 2. $a \mathop{\downarrow}^0_M b$ と仮定して良い.

proof of claim2. Existence より c を $\mathrm{tp}(c/Ab)=\mathrm{tp}(a/Ab)$ かつ $c \mathop{\downarrow}^0_{Ab} M$ となるように取る. 自己同型で移して M や $(b_i)_{i\in\omega}$ を取り替えることで $a \mathop{\downarrow}^0_{Ab} M$ をしても良い. Transitivity より $a \mathop{\downarrow}^0_A Mb$ が成立し, Monotonicity より $a \mathop{\downarrow}^0_M b$ が成立する. $\dashv$ claim2

次を満たす $(a_i)_{i\in\omega}$ を構成する.

- $a_0=a$
- $a_i \mathop{\downarrow}^0_M \{b_j\mid j\le i\}$
- $p_i(x)=\mathrm{tp}(a_{i+1}/M\{b_j\mid j\le i\})=\mathrm{tp}(a_i/M\{b_j\mid j\le i\})$
- $\mathrm{tp}(a_ib_i/M)=\mathrm{tp}(ab/M)$

$a_0,\dots,a_i$ まで構成したとき自己同型で移すことで $\bar a$ を

$$\mathrm{tp}(\bar a b_{i+1}/M)=\mathrm{tp}(ab/M)$$

を満たすように取る. Independence over models を

$$\{b_j\mid j\le i\} \mathop{\downarrow}^0_M b_{i+1},\ \bar a \mathop{\downarrow}^0_M b_{i+1},\ a_i \mathop{\downarrow}^0_M \{b_j\mid j\le i\}$$

に対して使うことで a_{i+1} を取れば良い.

構成より $\bigcup_{i\in\omega}p_i(x)$ は consistent となる. $p(x,y)=\mathrm{tp}(ab/M)$ とすると, $p(x,b_i)\subseteq\bigcup_{i\in\omega}p_i(x)$ より, 補題 1.8 より $\mathrm{tp}(a/Ab)$ は A 上 divide しない.

このことから Local character と命題 2.5 より T は Simple となる.

次に $\mathrm{tp}(a/Ab)$ が A 上 divide しないとき $a \mathop{\downarrow}^0_A b$ が成立することを示す. Existence を繰り返し用いることで任意の $\lambda\in\mathrm{ON}$ に対して, $(b_i)_{i\in\lambda}$ を $\mathop{\downarrow}^0$-independent かつ $\mathrm{tp}(b_i/A)=\mathrm{tp}(b/A)$ を満たすように取れる. 十分大きい λ を取り, 補題 2.18 と同様の議論をすることによって $(c_i)_{i<\kappa}$ を次を満たすように取れる.

- A-indiscernible
- $\mathop{\downarrow}^0_A$-independent
- $c_0=b$
- $\mathrm{tp}(c_i/A)=\mathrm{tp}(b/A)$

系 1.9 より c を $\mathrm{tp}(c/Ab) = \mathrm{tp}(a/Ab)$ かつ $(c_i)_{i<\kappa}$ が Ac-indiscernible を満たすように取る. Local character より $B \in [A \cup \{c_i \mid i < \kappa\}]^{<\kappa}$ を $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^0_B A \cup \{c_i \mid i < \kappa\}$ を満たすように取る. Monotonicity よりある i_0 が存在して $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^0_{A\cup\{c_i \mid i<i_0\}} c_{i_0}$ が成立する. $(c_i)_{i<\kappa}$ は $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^0_A$-independent より, $c_{i_0} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^0_A \{c_i \mid i < i_0\}$ が成立する.

Transitivity より $c_{i_0} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^0_A c\cup\{c_i \mid i < i_0\}$ が成立し, Monotonicity より $c_{i_0} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^0_A c$ が成立する. $\mathrm{tp}(cc_{i_0}/A) = \mathrm{tp}(cb/A) = \mathrm{tp}(ab/A)$ より示された. □

参考文献

[1] Tent, K., and Ziegler, M. (2012). A Course in Model Theory (Lecture Notes in Logic). Cambridge: Cambridge University Press.