alternating chain

Yasuda Yasutomo

2019 年 11 月 22 日

One-step lemma を使って枝の一方が ill-fouded となっている alternating chain を作る.

1 準備

定義 1.1. $\mathcal{T}$ を $\mathcal{M}$ 上の *iteration tree* とする. $\alpha < \beta < \mathrm{lh}\,(\mathcal{T})$ に対して

$$\rho\,(\alpha, \beta) = \min\{\mathrm{strength}^{\mathcal{M}_\gamma}\,(\mathrm{E}_\gamma) \mid \alpha \leq \gamma < \beta\}$$

と定義する.

定義 1.2. $\mathcal{T}$ を *iteration tree* とし, $\beta + 2 < \mathrm{lh}\,(\mathcal{T})$ とする. このとき $\mu\,(\beta)$ を,

$$\mu\,(\beta) = \sup\{\mathrm{cp}\,(E_\alpha) \mid (\alpha+1)^T_- \leq \beta < \alpha < \mathrm{lh}\,(T)\}$$

と定義する.

また *iteration tree* $\mathcal{T}$ が *plus one* であるとは,

$$\mu\,(\beta) + 1 \leq \mathrm{strength}^{\mathcal{M}_\beta}\,(\mathrm{E}_\beta)$$

を満たすときのことをいう.

定理 1.3 (One-step lemma)**.** 次を仮定する.

- M, N は推移的な ZFC のクラスモデル.
- $\delta \in M \cap N$ を V で到達不能基数, M で Woodin 基数.
- $\kappa \leq \eta < \delta$ を順序数.
- $\xi < \beta_M$ を M の順序数とする. また β_N を N の順序数とする.
- $x_M, y_M \in {}^{<\omega}V^M_{\delta+\xi}$ かつ $x_N \in {}^{<\omega}V^N_{\delta+\beta_N}$. ただし $\mathrm{lh}\,(x_M) = \mathrm{lh}\,(x_N)$ とする.
- $\phi(v)$ を論理式とする.

これらに対して, 次を仮定する.

- M, N *agree through* $\kappa + 1$.
- $\left(\mathrm{tp}^\kappa_{\delta,\beta_M}\right)^M(x_M) = \left(\mathrm{tp}^\kappa_{\delta,\beta_N}\right)^N(x_N)$
- κ は M において, β_M*-reflecting in* x_M *relative to* δ.
- $V^M_{\delta+\beta} \models \phi[\xi]$

このとき, ある順序数 $\lambda < \delta$ と M の (κ,λ)-エクステンダー $E \in V_\delta^M$ が存在して, $\prod_E^N (N,\in)$ は *ill-founded* または, 順序数 $\kappa^* \in \mathrm{Ult}\,(N,E)$ と $\xi^* \in \mathrm{Ult}\,(N,E)$, $y^* \in {}^{<\omega}V_{\delta+\xi^*}^{\mathrm{Ult}(N,E)}$ が存在して次を満たす.

- $i_E^N(x_N) \in {}^{<\omega}V_{\delta+\xi^*}^{\mathrm{Ult}(N,E)}$
- $\eta < \kappa^* < i_E^N(\kappa) < \delta$
- $\xi^* < i_E^N(\beta_N)$
- $\mathrm{Ult}\,(N,E)$, M *agree through* κ^*+1.
- $\left(\mathrm{tp}_{\delta,\xi^*}^{\kappa^*}\right)^{\mathrm{Ult}(N,E)}\left(i_E^N(x_N)\hat{\ }y^*\right) = \left(\mathrm{tp}_{\delta,\xi}^{\kappa^*}\right)^M (x_M\hat{\ }y_M)$
- κ^* は $\mathrm{Ult}\,(N,E)$ において, ξ^*-*reflecting in* $i_E^N(x_N)\hat{\ }y^*$ *relative to* δ.
- $V_{\delta+i_E^N(\beta_N)}^{\mathrm{Ult}(N,E)} \models \phi[\xi^*]$

iteration tree の構成をうまく回すトリックが次である.

命題 1.4. δ を到達不能基数とする. $X \in V_\delta$ を空でない集合とし, T を $X \times Y$ 上の木とする.
このときある順序数 ν, ζ_0, ζ_1, ρ が存在して次を満たす.

1. $\nu < \zeta_0 < \zeta_1 < \rho$
2. ν, ζ_0, ζ_1, ρ は共終数が δ より大きい強極限基数.
3. $\left(\mathrm{tp}_{\rho,0}^\nu\right)(\langle\zeta_0\rangle) = \left(\mathrm{tp}_{\rho,0}^\nu\right)(\langle\zeta_1\rangle)$
4. $T \in V_\nu$

証明. Z を ρ は共終数が δ より大きい強極限基数のクラスとする. $\nu \in Z$ を $T \in V_\nu$ となる最小でとる. ρ を $|V_{\nu+1}|$ 番目の Z の元とする. 取り方から条件を満たす ζ_0, ζ_1 が存在する. □

Note 1. 上の状況と同じ状況とし, ν, ζ_0, ζ_1, ρ を取る. このとき次が成立.

- $\mathcal{U} \in V_\delta$ を *iteration tree* とすると, $\mathcal{U}$ から定まる初等埋め込みに関して ν, ζ_0, ζ_1, ρ は固定される.
- 任意の $z \in {}^{<\omega}V_\nu$ と $\alpha < \delta$ に関して, $\left(\mathrm{tp}_{\delta,\zeta_0}^\alpha\right)(z) = \left(\mathrm{tp}_{\delta,\zeta_0}^\alpha\right)(z)$ が成立する.
- 任意の $z \in {}^{<\omega}V_\nu$ と $\kappa < \delta$ に関して, κ が ζ_0-*reflecting in* z *relative to* δ であることと ζ_1-*reflecting in* z *relative to* δ であることは同値.

定理 1.5. *alternating chain* とは長さ ω の V 上の *iteration tree* $\mathcal{C}$ で次の *tree ordering* C を持つものである.

$$mCn \Leftrightarrow 0 = m < n \vee \exists k \geq 1\,(m+2k=n)$$

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[r, dash] & 4 \arrow[r, dash] & 6 \arrow[r, dash] & 8 \ \cdots \\
0 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & & & \\
 & 1 \arrow[r, dash] & 3 \arrow[r, dash] & 5 \arrow[r, dash] & 7 \ \cdots
\end{tikzcd}$$

Note 2.
- 定義から *alternating chain* は *plus one* であることがわかる.
- *alternating chain* には枝が 2 本あり, $\{2n \mid n \in \omega\}$ を *Even*, $\{0\} \cup \{2n+1 \mid n \in \omega\}$ を *Odd* と呼ぶ.

2　構成

定理 2.1. δ を Woodin 基数とする．このとき *alternating chain* $\mathcal{C}$ で $\mathcal{C} \in V_\delta$ かつ *Even* が *ill-founded* となるものが存在する．

証明. δ に対して, ν, ζ_0, ζ_1, ρ を取る．$k \in \omega$ 上の帰納法で $\mathcal{C}_{2k}$, κ_{2k}, β_k で次を満たすものを構成する．

- $\mathcal{C}_{2k} \in V_\delta$ は V 上の長さ $2k+1$ の *iteration tree* で, *tree ordering* が $C \restriction (2k+1)$ となる．
- $\kappa_{2k} < \delta$
- β_k は順序数．

さらに各 $k \in \omega$ に関して次を満たすように構成する．

1. M_{2k}, $M_{(2k+1)^-}$ *agree through* $\kappa_{2k}+1$.
2. $\left(\mathrm{tp}^{\kappa_{2k}}_{\delta,\beta_k+1}\right)^{M_{2k}}(\emptyset) = \left(\mathrm{tp}^{\kappa_{2k}}_{\delta,\zeta_0+1}\right)^{M_{(2k+1)^-}}(\emptyset)$
3. κ_{2k} は M_{2k} において, (β_k+1)-*reflecting in* $\emptyset$ *relative to* δ.
4. $n < m \leq k$ ならば, $\beta_m < j_{2n,2m}(\beta_n)$ が成立する．

(構成) $k=0$ のとき．δ は Woodin 基数であるから κ_0 を (ζ_0+1)-*reflecting in* $\emptyset$ *relative to* δ となるように取り, $\beta_0 = \zeta_0$ とする．

$\mathcal{C}_{2k}$, κ_{2k}, β_k まで構成したと仮定する．δ は *iteration tree* の超冪における初等埋め込みにおいて固定されることから, δ は M_{2k} において Woodin 基数である．

One-step lemma を,

- $M = M_{2k}$
- $N = M_{(2k+1)^-}$
- $\kappa = \kappa_{2k}$
- $\eta = \kappa_{2k}$
- $\beta_M = \beta_k + 1$
- $\xi = \beta_k$
- $\beta_N = \zeta_0 + 1$
- $x_M = \emptyset$
- $y_M = \emptyset$
- $x_N = \emptyset$
- $\phi(v) =$ "$\kappa + v$ は最大の順序数"

に対して使う．$\lambda < \delta$ と M_{2k} の (κ_{2k}, λ)-エクステンダー $E \in V_\delta^{M_{2k}}$ を取る．このとき帰納法の仮定より $\prod_E^{M_{(2k+1)^-}} M_{(2k+1)^-}$ は整礎となる．よって κ^*, ξ^*, y^* を取る．このとき $y^* = \emptyset$, $\xi^* = \zeta_0$ となっている．

$E_{2k} = E$, $\kappa_{2k+1} = \kappa^*$ とし, $\mathcal{C}_{2k}$ の延長を $\mathcal{C}_{2k+1} \in V_\delta$ とする．$\mathcal{C}_{2k+1}$ は V 上の長さ $2k+2$ の *iteration tree* で, *tree ordering* が $C \restriction (2k+2)$ となっている．

また *One-step lemma* と ζ_0, ζ_1 の取り方から次が成立する．

1. M_{2k+1}, M_{2k} *agree through* $\kappa_{2k+1}+1$.

2. $\left(\mathrm{tp}^{\kappa_{2k+1}}_{\delta,\zeta_1}\right)^{M_{2k+1}}(\emptyset) = \left(\mathrm{tp}^{\kappa_{2k+1}}_{\delta,\beta_k}\right)^{M_{2k}}(\emptyset)$
3. κ_{2k+1} は M_{2k+1} において，ζ_1*-reflecting in* $\emptyset$ *relative to* δ.

再び *One-step lemma* を，

- $M = M_{2k+1}$
- $N = M_{2k}$
- $\kappa = \kappa_{2k+1}$
- $\eta = \kappa_{2k+1}$
- $\beta_M = \zeta_1$
- $\xi = \zeta_0 + 1$
- $\beta_N = \beta_k$
- $x_M = \emptyset$
- $y_M = \emptyset$
- $x_N = \emptyset$
- $\phi(v) = $ "$v = v$"

に対して使う．$\lambda^* < \delta$ と M_{2k+1} の $(\kappa_{2k+1}, \lambda^*)$-エクステンダー $E^* \in V_\delta^{M_{2k+1}}$ を取る．このとき $\prod_{E^*}^{M_{2k}} M_{2k}$ は整礎となる．よって κ^*, ξ^* を取る．$\xi = \zeta_0 + 1$ より β_{k+1} を $\beta_{k+1} + 1 = \xi^*$ となるように取る．$E_{2k+1} = E^*$, $\kappa_{2k+2} = \kappa^*$ として，$\mathcal{C}_{2k+1}$ の延長を $\mathcal{C}_{2k+2} \in V_\delta$ とする．$\mathcal{C}_{2k+2}$ は V 上の長さ $2k+3$ の *iteration tree* で，*tree ordering* が $C \restriction (2k+3)$ となっている．

$2k+3$ においても帰納法の仮定は成立している．(構成終)

枝 *Even* の *direct limit* を $\left(\bar{M}_{Even}, \langle j^{Even}_{2n} \mid n \in \omega \rangle\right)$ とすると，$n < m \in \omega$ について，構成より $j^{Even}_{2m}(\beta_m) < j^{Even}_{2n}(\beta_n)$ が成立するので $\bar{M}_{Even}$ は *ill-founded* である． □

参考文献

[1] Martin, D., and J. R. Steel. Iteration Trees. Journal of the American Mathematical Society 7, no. 1 (1994): 1-73. doi:10.2307/2152720

[2] Martin, D., and Steel, J. (1989). A Proof of Projective Determinacy. Journal of the American Mathematical Society, 2(1), 71-125. doi:10.2307/1990913

[3] Martin, D. Determinacy of Infinitely Long Games.