タイプ排除定理

Yasuda Yasutomo

平成 30 年 11 月

モデル理論におけるタイプ排除定理を紹介する．

1　タイプ排除定理

definition 1.1. T : L-理論とする．

L-論理式の T と無矛盾な集合 $\Sigma(\overline{x})$ $(|\overline{x}| = n)$ を部分 n-タイプという．特に包含に関して極大なものを完全 n-タイプという．

remark 1. 以下，部分 n-タイプを $\Sigma(\overline{x})$ で，完全 n-タイプを $p(\overline{x})$ で表す．

definition 1.2. $\Sigma(\overline{x})$ を L-論理式の集合とする．

- 次の条件を満たす L-論理式 $\phi(\overline{x})$ が存在するとき，$\Sigma(\overline{x})$ は T で孤立的という．そうでないとき非孤立的という．
  1. $\mathrm{T} \cup \{\exists\overline{x}\phi(\overline{x})\}$ はモデルを持つ．
  2. $\mathrm{T} \vdash \forall\overline{x}(\phi(\overline{x}) \rightarrow \Sigma(\overline{x}))$
- $\Sigma(\overline{x})$ を満たすような組を解といい，T のモデル $\mathfrak{M}$ で $\Sigma(\overline{x})$ で解を持つとき，$\mathfrak{M}$ は $\Sigma(\overline{x})$ を実現するという．
- $\Sigma(\overline{x})$ が T のモデル $\mathfrak{M}$ で解を持たないとき， $\Sigma(\overline{x})$ は $\mathfrak{M}$ で排除 (*omit*) されるという．

theorem 1.3 (タイプ排除定理)**.** T : 可算，無矛盾，$\Sigma(x)$ は T で非孤立的とする．このとき $\Sigma(x)$ を排除する T のモデルが存在する．

Proof. 可算個の新しい定数 $C = \{c_i \,|\, i \in \omega\}$ を用意する．T を次の条件を満たすように T^* に拡張する．

- $\mathrm{L}(C)$-論理式 $\psi(x)$ に対して，ある $c \in C$ が存在して，$\exists x\psi(x) \rightarrow \psi(c) \in \mathrm{T}$ を満たす．
- $\forall c \in C\, \exists\sigma(x) \in \Sigma(x) s.t. \neg\sigma(c) \in \mathrm{T}^*$

T^* を構成するために，帰納法で $\mathrm{T} = \mathrm{T}_0 \subseteq \mathrm{T}_1 \subseteq ...$ を定義する．$\mathrm{L}(C)$-論理式を整列し，$\{\psi_i(x) \,|\, i \in \omega\}$ とする．T_n まで定義したとする．

- (n=2i のとき)$c \in C$ を T_n と $\psi_i(x)$ に現れない定数とし，$\mathrm{T}_{n+1} = \mathrm{T}_n \cup \{\exists x\psi_i(x) \rightarrow \psi_i(c) \in \mathrm{T}$ とする．
- (n=2i+1 のとき)$\mathrm{T}_n = \mathrm{T} \cup \{\delta(c_i, \overline{c})\}$ の形で表せる．($\overline{c}$ は c_i を含まない．) $\exists\overline{y}\delta(x, \overline{y})$ は $\Sigma(x)$ を孤立させないので，ある $\sigma(x) \in \Sigma(x)$ が存在して，$\exists\overline{y}\delta(x, \overline{y}) \wedge \neg\sigma(x)$ は T と無矛盾．$\mathrm{T}_{n+1} = \mathrm{T}_n \cup \{\neg\sigma(c_i)\}$

とする．

$T^* = \bigcup_{i\in\omega} T_i$ とし，定義よりこれは矛盾であるからモデル $\mathfrak{M}^* \models T^*$ をとる．$\mathfrak{M} = \{c^{\mathfrak{M}^*} \mid c \in C\}$ とすると Tarski-Vaught test より，$\mathfrak{M}^*$ の初等部分モデルになっている．構成より $\mathfrak{M}$ は $\Sigma(x)$ を排除している．

□

Corollary 1. T : 可算，無矛盾，$\Sigma_i(x_1, x_2, ..., x_{n_i})(i \in \omega)$ はすべて非孤立的とする．このとき，すべての $\Sigma_i(x_1, x_2, ..., x_{n_i})$ を T のモデルが存在する．

Proof. tuple とタイプの組全体は可算なので，整列して同じように構成してやれば良い． □

2 拡張

可算個のタイプを非可算に拡張したら同様の定理が成り立つだろうか？

fact 1. 非可算言語においては，非孤立的だが排除できないタイプが存在する．

言語の可算性は本質的である．以下可算言語において，非可算個のタイプを排除する場合を考える．実は完全タイプに制限してやれば連続体濃度未満の個数のタイプなら排除することができる．

definition 2.1.

- $\phi_0(\overline{x})$ と $\phi_1(\overline{x})$ が $\overline{x}' \subset \overline{x}$ において *separable* $\Leftrightarrow$ ある L-論理式 $\xi_0(\overline{x}')$ と $\xi_1(\overline{x}')$ が存在して，$T \vdash \phi_k(\overline{x}) \to \xi_k(\overline{x}')(k = 0, 1)$ が成立し，かつ $\xi_0(\overline{x}')$ と $\xi_1(\overline{x}')$ は T で両立しない．
- $\phi_0(\overline{x})$ と $\phi_1(\overline{x})$ が $\overline{x}' \subset \overline{x}$ において *essentially separable* $\Leftrightarrow$ ある L-論理式 $\psi'_k(\overline{x})$ が存在して，$T \vdash \psi'_k \to \psi_k(k = 0, 1)$ かつ $\psi'_0(\overline{x})$ と $\psi'_1(\overline{x})$ は $\overline{x}' \subset \overline{x}$ において *separable*.
- $\Phi = \phi_0(\overline{x}), ..., \phi_n(\overline{x})$:L-論理式の列が *maximally separated* $\Leftrightarrow$ 各 $i \neq j$ と $\overline{x}' \subset \overline{x}$ に対して，$\phi_i(\overline{x})$ と $\phi_j(\overline{x})$ が $\overline{x}'$ において *essentially separable* ならば *separable* を満たす．
- $\Phi' = \phi_0(\overline{x}), ..., \phi_n(\overline{x})$ が L-論理式の列 $\Phi = \phi_0(\overline{x}), ..., \phi_n(\overline{x})$ に対して *maximal separation* である $\Leftrightarrow$ Φ' が *maximally separated* かつ $T \vdash \phi'_i \to \phi_i(i = 0, ...n)$ を満たす．

lemma 2.2. 任意の L-論理式の列 $\Phi = \phi_0(\overline{x}), ..., \phi_n(\overline{x})$ に対し，*maximal separation* $\Phi' = \phi_0(\overline{x}), ..., \phi_n(\overline{x})$ が存在する．

Proof. $i \neq j$ に対し，$\overline{x}' \subset \overline{x}$ で $\phi_i(\overline{x})$ と $\phi_j(\overline{x})$ が essentially separable のとき，$\psi'_i(\overline{x})$ と $\psi'_j(\overline{x})$ が $T \vdash \psi'_k \to \psi_k(k = i, j)$ かつ separable となるようにとり，それぞれ入れ替えれば良い．この操作を繰り返せば，maximal separation を得る． □

lemma 2.3. $\phi_0(\overline{x})$ と $\phi_1(\overline{x})$: L-論理式とし，$\overline{x}' \subset \overline{x}$ で *essentially separable* でないとする．このとき，$\phi_0(\overline{x})$ と $\phi_1(\overline{x})$ は同じ完全タイプ $p(\overline{x}')$ を孤立させせる．

Proof. そうでないと仮定すると，$\phi_0(\overline{x}) \land \psi(\overline{x})'$ と $\phi_1(\overline{x}) \land \neg\psi(\overline{x}'$ がどちらも T と無矛盾なようにとれる．このとき $\phi_0(\overline{x}) \land \psi(\overline{x})'$ と $\phi_1(\overline{x}) \land \neg\psi(\overline{x}')$ は $\overline{x}'$ において separable だが，これは $\phi_0(\overline{x})$ と $\phi_1(\overline{x})$ が $\overline{x}'$ で essentially separable でないことに矛盾． □

theorem 2.4 (Shelah). 言語 L を可算集合とする．T を L-理論とし，R を非孤立完全タイプの集合で，$|R| < 2^\omega$ とする．このとき T のモデル $\mathfrak{M}$ で R を排除するものが存在する．

Proof. $\overline{x}_n \subseteq \{x_k \,|\, k < n\}$ と表すことにする．可算個の新しい定数 $C = \{c_i \,|\, i \in \omega\}$ を用意する．L(C)-論理式で $\exists x \phi(\overline{c}_i, x) \to \phi(\overline{c}_i, c_i)$ の形のものを整列し，$\{\theta_i(\overline{c}_i, c_i \,|\, i \in \omega\}$ とする．

帰納法により，二進木により添字付けられた L(C)-論理式の有限集合の族 $\{\Sigma_\tau(\overline{c}_{len(\tau)} \,|\, \tau \in 2^{<\omega}$ で以下の条件（∗）を満たすものを定義する．

任意の $n \in \omega$ と $\tau \in 2^n$ において，

1. $m < n \to \Sigma_{\tau|m} \subset \Sigma_\tau$
2. Σ_τ は T と無矛盾．
3. Σ_{tau} は θ_n を含む．
4. $\{\wedge \Sigma_\sigma(\overline{c}_n)\}_{\sigma \in 2^n}$ は maximally separated.

(構成)$\Sigma_{<>} = \emptyset$ とし，$\forall \sigma \in 2^n$ で $\Sigma_\sigma(\overline{c}_n)$ まで構成したとする．$\Sigma^{0,k}_\sigma = \Sigma_\sigma(\overline{c}_n)(k = 0, 1)$ とする．lemma 2.3. より $\{\wedge \Sigma^{0,k}_\sigma(\overline{c}_n)\}_{\sigma \in 2^\omega,\ k=0,1}$ の maximal separation $\{\psi_{\sigma,k}(\overline{c}_n)\}_{\sigma \in 2^\omega, k=0,1}$ をとり，$\Sigma^{1,k}_\sigma(\overline{c}_n) = \Sigma^{0,k}_\sigma(\overline{c}_n) \cup \{\psi_{\sigma,k}(\overline{c}_n)\}$ とする．$\Sigma_{\sigma \circ k} = \Sigma^{1,k}_\sigma \cup \{\theta_n(\overline{c}_n, c_n)\}$ とする．$\{\Sigma_\tau(\overline{c}_{n+1})\}_{\tau \in 2^{n+1}}$ は構成より，（∗）を満たす．

$\tau \in 2^\omega$ において， $\Sigma_\tau(C) = \bigcup_{n \in \omega} \Sigma_{\tau|n}$ とする．Σ_{tau} は θ_n を含むことから Tarski-Vaught test より，$\Sigma_\tau(C)$ を実現する τ は T のモデルとなる．(構成-終-)

claim 1. すべての $p \in R$ において，$\{\tau \in 2^\omega \,|\, \mathfrak{M}_\tau \models \exists \overline{x} p(\overline{x})\}$ は可算集合．

Proof. $p(\overline{x}) \in R$ を固定．$\Sigma_\tau(C) \cup p(\overline{c})$ は T と無矛盾だと仮定する．また $\tau' \neq \tau$ をとり，$\Sigma_{\tau'}(C) \cup p(\overline{c})$ も T と無矛盾だと仮定する．このとき $\overline{c} \subset \overline{c}_n$ なる n において，$\Sigma_{\tau|n}(C)$ と $\Sigma_{\tau'|n}(C)$ は essentially separable でない．(p の極大性より.) これよりlemma 2.4. より p は孤立的となり，R の仮定に矛盾．ゆえに各 $p \in R$ と $\overline{c} \subsetneq C$ において，$\{\tau \in 2^\omega \,|\, \Sigma_\tau(C) \cup p(\overline{c})$ が T と無矛盾 $\}$ は高々一個の元のみからなる．$\overline{c} \subsetneq C$ の選び方は可算であるから claim の主張が従う． □

$|R| < 2^\omega$ より，ある $\tau \in 2^\omega$ で R を排除する $\mathfrak{M}_\tau$ が取れる． □

3　参考文献

[1] Newelsk.i, L. (1987). Omitting types and the real line. Journal of Symbolic Logic, 52(4), 1020-1026. doi:10.2307/2273835

[2] Shelah, S., Classification Theory and the Number of Nonisomorphic Models, North-Holland,1991. second edition

[3] Tent, K., and Ziegler, M. (2012). A Course in Model Theory (Lecture Notes in Logic). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781139015417

[4] Kota Takeuchi. (2011). A GENERALIZATION OF SHELAH'S OMITTING TYPES THEOREM.Tsukuba Journal of Mathematics.Vol. 35, No. 2