projective ordinal の基本的な性質

Yasuda Yasutomo

2019 年 12 月 9 日

この記事は Advent Calendar 2019 の 12 月 19 日の記事の前座であり, その導入と予備知識編となる.

1 決定性

決定性を知らない人向けに定義などを書いておく.

また同ブログ内に都内のサークルで決定性公理について発表したレジュメがあるのでそちらも見てみると参考になるかもしれません. 射影階層とかはそちらに書いているので見てください.

定義 1.1 (Game)**.** $A \subseteq \mathbb{R} = \omega^\omega$ とする. *game* $G(A)$ を次のように定義する.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathrm{I} & a_0 \arrow[dr] & & a_2 \arrow[dr] & & a_4 & & \cdots\cdots \\ \mathrm{II} & & a_1 \arrow[ur] & & a_3 \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

上の図のように I と II が交互に自然数を出す. この操作を繰り返し実数 $\alpha = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ を得る. $\alpha \in A$ のとき, I の勝利. そうでないとき II の勝利と定義する.

- I の戦略とは関数 $\sigma\colon \bigcup_{n\in\omega} \omega^{2n} \to \omega$ のことである. II の戦略とは関数 $\tau\colon \bigcup_{n\in\omega} \omega^{2n+1} \to \omega$ のことである.
- I が戦略 σ で, II が戦略 τ で *game* をプレイしたときの結果を $\sigma * \tau$ と表す.
- σ を I の戦略とする. $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\sigma * [\alpha]$ を, II が α をプレイし I は戦略 σ に従ってプレイした *game* の結果を表すとする. II の戦略 τ に対して $[\alpha] * \tau$ を同様に定義する.
- I の戦略 σ が *game* $G(A)$ の必勝戦略とは, 任意の II の戦略 τ に対して $\sigma * \tau \in A$ となることである.

注意 1. 戦略は実数として表すことができる. 以降戦略を $\mathbb{R}$ の元として扱う.

定義 1.2 (Determinacy)**.** 集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ が決定的とは, I か II のどちらかが必ず *game* $G(A)$ において必勝戦略を持つときのことをいう.

定義 1.3.

- 決定性公理 (AD) とは全ての実数の集合は決定的という公理である.
- 射影集合の決定性 (PD) とは全ての射影集合は決定的という言明である.

注意 2. 決定性公理と選択公理は矛盾する.

命題 1.4. 選択公理を仮定する. このとき決定的でない実数の集合が存在する.

また決定性は実数の集合に良い性質をもたらす.

定理 1.5. AD を仮定する. このとき次が成立する.

1. 全ての実数の集合はルベーグ可測.
2. 全ての実数の集合はベールの性質を持つ.
3. 全ての実数の集合は完全集合の性質を持つ.

あとで見ていくように決定性は実数に強い性質をもたらすだけではなく，巨大基数の存在をも導く. このような強い仮定に対しても，無矛盾性は証明されている.

定理 1.6 (Martin-Steel)**.** 無限個の Woodin 基数が存在すると仮定する. このとき PD が成立する.

定理 1.7 (Martin-Steel-Woodin)**.** 無限個の Woodin 基数とその上に可測基数の存在を仮定する. このとき $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ が成立する.

証明は原論文を読むのが早いが，非常にざっくりどんなことをしているか知りたい人は筆者が数学基礎論若手の会でこれらについて発表したスライドが同ブログ内にあるので見てみると良いです.

2 射影的順序数

この章では ZF + AD + DC で議論する.

定義 2.1 (射影的順序数)**.** 各 $n \leq 1$ に対して射影的順序数 $\boldsymbol{\delta}^1_n$ を次のように定義する.

$$\boldsymbol{\delta}^1_n = \sup\{\xi \mid \xi \text{ は } \mathbb{R} \text{ の } \boldsymbol{\Delta}^1_n\text{-前整列順序の長さ }\}$$

射影的順序数に関して次のようなことが成立する.

定理 2.2 (Kechris-Kunen-Martin-Solovay)**.** 次が成立する.

- $\boldsymbol{\delta}^1_n$ は全て基数.
- $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+2} = \left(\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}\right)^+$.
- $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1} = \kappa^+_{2n+1}$. ただし κ_{2n+1} は共終数 ω の基数.
- $\boldsymbol{\delta}^1_n$ は全て正則.
- $\boldsymbol{\delta}^1_n$ は全て可測基数.

これらを示すことが目標である. Moschovakis のコーディング補題が重要となる.

定義 2.3.

- $A \subseteq \mathbb{R}$ 上の *norm* φ とは写像 $\varphi\colon A \to \mathrm{ON}$ のことである.
- Γ を *pointclass* とする. *norm* $\varphi\colon A \to \lambda$ が Γ-*norm* であるとは関係 $\leq_\varphi$, $\leq_{\check{\varphi}}$ がそれぞれ Γ, $\check{\Gamma}$ で存在

して次を満たすことをいう．

$$\forall y \in \mathbb{R}\ A(y) \to \forall x \in \mathbb{R}\{(A(x) \land \varphi(x) \leq \varphi(y)) \leftrightarrow x \leq_\varphi y \leftrightarrow x \leq_{\tilde{\varphi}} y\}$$

定義 2.4. $F \subseteq \mathbb{R}$ と F 上の前整列順序 $\leq$ から定まる *norm* を $\varphi\colon F \to \xi = \mathit{length}(\leq)$ とする．関数 $f\colon \xi \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ に対して，$\mathrm{Code(f,\leq)} = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in F \land \beta \in f(\varphi(\alpha))\}$ とする．また $A \subseteq \xi^n$ に対して $\mathrm{Code(A,\leq)} = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n \mid (\varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_n)) \in A\}$ とする．

定義 2.5. $f\colon \xi \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ に対して，$g\colon \xi \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ が f の部分選択関数であるとは次を満たす．

- 全ての $\eta < \xi$ に対して，$g(\eta) \subseteq f(\eta)$ が成立する．
- 全ての $\eta < \xi$ に対して，$f(\eta) \neq \emptyset$ ならば $g(\eta) \neq \emptyset$ が成立する．

定理 2.6 (Moschovakis)**.** $\leq$ を $F \subseteq \mathbb{R}$ の $\boldsymbol{\Delta}^1_n$-前整列順序とし，ξ をその長さとする．このとき任意の $f\colon \xi \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ は部分選択関数 g で $\mathrm{Code(g,\leq)}$ が $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ となるものを持つ．また任意の $A \subseteq \xi^m$ に対して，$\mathrm{Code(A,\leq)}$ は $\boldsymbol{\Delta}^1_n$ となる．

以降コーディング補題といったらこの定理を指すこととする．コーディング補題の簡単な応用によって射影的順序数が全て基数であることがわかる．

定理 2.7. $\boldsymbol{\delta}^1_n$ は全て基数．

証明. そうでないと仮定する．このとき $\xi < \boldsymbol{\delta}^1_n$ と全単射 $f\colon \xi \to \boldsymbol{\delta}^1_n$ が存在する．$\leq$ を $\mathbb{R}$ の $\boldsymbol{\Delta}^1_n$-前整列順序で長さが ξ のものをとる．これは $\xi < \boldsymbol{\delta}^1_n$ より長さが ξ より真に長い $\mathbb{R}$ の $\boldsymbol{\Delta}^1_n$-前整列順序が取れるので，それを途中で切って作り変えれば長さが ξ の $\mathbb{R}$ の $\boldsymbol{\Delta}^1_n$-前整列順序を得る．$<^*$ を次のように定義する．

$$\eta <^* \theta \leftrightarrow f(\eta) < f(\xi)$$

コーディング補題より，$\mathrm{Code}(<^*, \leq)$ は $\mathbb{R}$ の $\boldsymbol{\Delta}^1_n$-前整列順序で長さが $\boldsymbol{\delta}^1_n$ となり，それより真に長いものを定義することができるので射影的順序数の定義に矛盾．よって全ての $\boldsymbol{\delta}^1_n$ は基数である． □

AD を仮定すると Wadge 補題によって全ての $\boldsymbol{\Pi}^1_n \setminus \boldsymbol{\Delta}^1_n$ に属する実数の集合は $\boldsymbol{\Pi}^1_n$-完全集合となるのであった．$\boldsymbol{\Pi}^1_{2n+1}$-完全集合に関してその norm の長さは射影的順序数に一致することが知られている．

定理 2.8 (Moschovakis)**.** PD を仮定する． φ を $\boldsymbol{\Pi}^1_{2n+1}$-完全集合の $\boldsymbol{\Pi}^1_{2n+1}$-*norm* とする． このとき $\mathit{length}(\varphi) = \boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ となる．

定義 2.9. $A \subseteq \mathbb{R}$ が λ-*Suslin* とは，ある $\omega \times \lambda$ 上の木 T が存在して $A = \mathfrak{p}[T]$ を満たすときのことをいう．

定理 2.10. 次が成立する．

1. 全ての $\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n+2}$-集合は $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$-*Suslin* である．
2. 全ての $\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n+1}$-集合は κ_{2n+1}-*Suslin* である．ただし κ_{2n+1} は $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ 未満の基数である．

証明. 1 の証明．全単射 $\langle , \rangle\colon \omega \times \kappa \to \kappa$ を固定する．$B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ を κ-*Suslin* とする．$\omega \times \omega$ 上の木 T を $B = \mathfrak{p}[T]$ となるようにとる．このとき $\omega \times \kappa$ 上の木 T^* を次のように定義する．

$$((k_0, \xi_0), \ldots, (k_n, \xi_n)) \in T^* \leftrightarrow ((k_0, (\xi_0)_0, (\xi_0)_0), \ldots, (k_n, (\xi_n)_0, (\xi_n)_0)) \in T$$

このとき $\exists^{\mathbb{R}} B$ は κ-*Suslin* であることがわかる．

従って $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$-集合が $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$-*Suslin* であることを示せば十分である．これは $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$-*scale* は $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$-*scale* であることから従う．

2 の証明. 同様に $\mathbf{\Pi}^1_{2n}$-集合がある $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ 未満の基数 κ において，κ-*Suslin* であることを示せば十分である．A を $\mathbf{\Pi}^1_{2n}$-完全集合とし，$\{\varphi_n\}_{n\in\omega}$ を A 上の $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$-*scale* とする．A は $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$ より有界性の議論から全ての $n \in \omega$ において $length(\varphi_n) < \boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ が成立する．また明らかに $\mathrm{cf}(\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}) > \omega$ であるからある $\kappa < \boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ が存在して全ての $n \in \omega$ において $length(\varphi_n) < \kappa$ が成立する．あとは同様． □

定義 2.11. λ を順序数とする．$\mathbb{B}_\lambda$ を全ての開集合を含んでいて，補集合と長さ λ 未満の和集合を取る操作で閉じた最小の集合族とする．$\mathbb{B}_\lambda$ の元 A を λ-ボレル集合という．

定理 2.12 (Suslin)**.** $A, B \subseteq \mathbb{R}$ を κ-*Suslin* とする．$A \cap B = \emptyset$ と仮定する．このときある κ^+-ボレル集合 C で $A \subseteq C$ かつ $B \cap C = \emptyset$ を満たすものが存在する．

系 2.13. $A \subseteq \mathbb{R}$ と $\mathbb{R} \setminus A$ が共に κ-*Suslin* と仮定する．このとき A は κ^+-ボレル集合である．

系 2.14. ボレル集合全体は $\mathbf{\Delta}^1_1$ と一致する．

定理 2.15 (Martin)**.** AD を仮定する．このとき $\mathbb{B}_{\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}} = \mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$ が成立する．

証明. $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1} \subseteq \mathbb{B}_{\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}}$ であることは $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$-集合はある基数 $\kappa < \boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ が存在して κ-*Suslin* であることと $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ は基数であることから $\mathbb{B}_{\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}}$-ボレル集合であること従うので良い．

$\mathbb{B}_{\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}} \subseteq \mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$ であることを示す．$\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$-集合が長さ $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ 未満の和集合に関して閉じていることを示せば十分である．そうでないと仮定して矛盾を導く．$\theta < \boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ をある $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$-集合の族 $\{A_\xi\}_{\xi<\theta}$ が存在して $A = \bigcup_{\xi<\theta} A_\xi$ が $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$ でないようなもので最小のものを取る．明らかに θ は非可算基数である．また $\xi \leq \eta < \theta$ ならば $A_\xi \subseteq A_\eta$ が成立するとして良い．$\leq$ を $\mathbb{R}$ の長さ θ の $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$-前整列順序とする．$f\colon \theta \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ を次のように定義する．

$$f(\xi) = \{\alpha \mid \alpha \text{ は } A_\xi \text{ の } \mathbf{\Delta}^1_{2n+1}\text{-}code\}$$

コーディング補題より，f の部分選択関数 g で $\mathrm{Code(g, \leq)}$ が $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$ となるものを取る．

このとき，

$$\alpha \in A \leftrightarrow \exists\beta[((\beta)_0, (\beta)_1) \in \mathrm{Code(g, \leq)} \wedge \alpha \in \mathbf{\Delta}_{(\beta)_1}]$$

が成立するので A は $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$-集合である．仮定より A は $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$-集合ではため，*Wadge* 補題から A は $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$-完全集合である．

また $\alpha \in A$ に対して，$\varphi(\alpha) = \mu\xi[\alpha \in A_{\xi+1} \setminus A_\xi]$ とするとこれは $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$-*norm* となる．しかし $pwo(\mathbf{\Pi}^1_{2n+1})$ であるから $pwo(\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1})$ とはならない．これは矛盾． □

また次が成立する．

定理 2.16. $A \subseteq \mathbb{R}$ が κ-*Suslin* ならば，$A \in \mathbb{B}_{\kappa^{++}}$ が成立する．

定理 2.17 (Martin)**.** $A \subseteq \mathbb{R}$ が κ-*Suslin* かつ $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ ならば，$A \in \mathbb{B}_{\kappa^+}$ が成立する．

定理 2.18 (Kechris)**.** AD を仮定する．このとき $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1} = \kappa^+_{2n+1}$ が成立する．ただし κ_{2n+1} は共終数 ω の基数．

証明. κ_{2n+1} を全ての $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$ が κ-*Suslin* となるような最小とする．

$\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ は基数であるから $\kappa^+_{2n+1} \leq \boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ は明らか．$\kappa^{++}_{2n+1} \leq \boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ と仮定する．このとき $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1} \subseteq \mathbb{B}_{\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}} = \mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$ となり矛盾．

また $\mathrm{cf}(\kappa_{2n+1}) > \omega$ と仮定すると，$\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1} \subseteq \mathbb{B}_{\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}} = \mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$ となり矛盾． □

定理 2.19 (Kunen-Martin)**.** AD を仮定する．このとき $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+2} = (\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1})^+$ が成立する．

証明. φ を $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$-完全集合上の $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$-*norm* とする．このとき φ の長さは $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ である．φ を使って定義できる $\mathbb{R}$ の前整列順序は $\mathbf{\Delta}^1_{2n+2}$ となるから $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1} < \boldsymbol{\delta}^1_{2n+2}$ が成立する．

また $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+2}$ は基数であるから $(\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1})^+ \leq \boldsymbol{\delta}^1_{2n+2}$ が成立する．また $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+2}$-集合は $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$-*Suslin* であるから，$\boldsymbol{\delta}^1_{2n+2} \leq (\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1})^+$ が成立する．ゆえ $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+2} = (\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1})^+$ が成立する． □

以上より次がわかる．

定理 2.20. 次が成立する．

- $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+2} = \left(\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}\right)^+$.
- $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1} = \kappa^+_{2n+1}$．ただし κ_{2n+1} は共終数 ω の基数．

また今までの議論から次のことが直ちに従う．

定理 2.21. AD を仮定する．このとき全ての $n \geq 1$ において，$\boldsymbol{\delta}^1_n < \boldsymbol{\delta}^1_{n+1}$ が成立する．

定理 2.22. AD を仮定する．このとき全ての $n \geq 1$ において次が成立する．

$$\boldsymbol{\delta}^1_n = \sup\{\xi \mid \xi \text{ は } \mathbf{\Sigma}^1_n\text{-整礎関係の長さ}\}$$

次に射影的順序数が正則になることを示す．

定理 2.23 (Moschovakis)**.** AD を仮定する．このとき $\boldsymbol{\delta}^1_n$ は正則．

証明. $\boldsymbol{\delta}^1_n$ が特異基数と仮定して矛盾を導く．$\lambda < \boldsymbol{\delta}^1_n$ とし，$f\colon \lambda \to \boldsymbol{\delta}^1_n$ を共終写像とする．$\leq$ を $\mathbb{R}$ の長さ λ の $\mathbf{\Delta}^1_n$-前整列順序とする．$g\colon \lambda \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ を次のように定義する．

$$g(\xi) = \{\alpha \mid \alpha \text{ は長さ } f(\xi) \text{ の } \mathbf{\Sigma}^1_n\text{-整礎関係の } \mathbf{\Sigma}^1_n\text{-}code\}$$

コーディング補題より g^* を g の部分選択関数で $\mathrm{Code}(\mathrm{g}^*, \leq)$ が $\mathbf{\Sigma}^1_n$ となるものを取る．$G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ を普遍 $\mathbf{\Sigma}^1_n$-集合とする．整礎関係 $\prec$ を定義する．

$$(u, v, w) \prec (x, y, z) \leftrightarrow u = x \wedge v = y \wedge (u, v) \in \mathrm{Code}(\mathrm{g}^*, \leq) \wedge (w, z) \in G_v$$

$\prec$ は $\mathbf{\Sigma}^1_n$ であり，長さ $\boldsymbol{\delta}^1_n$ を持つ．これは矛盾． □

最後に $\boldsymbol{\delta}^1_n$ が可測基数になることを示す．

定理 2.24 (Kunen-Martin-Solovay)**.** AD を仮定する．このとき $\boldsymbol{\delta}^1_n$ は可測基数となる．

この証明の本質はよく使うことであるが，実数を可算個の順序数のコードとして扱うところにある．

証明. $W \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ を普遍 $\mathbf{\Sigma}^1_n$-集合とする．$S = \{\alpha \mid W_\alpha \text{ は整礎関係}\}$ とする．各 $\alpha \in S$ に対して，$|\alpha| = length(W_\alpha)$ とする．このとき $\boldsymbol{\delta}^1_n = \sup\{|\alpha| \mid \alpha \in S\}$ が成立する．

各 $A \subseteq \boldsymbol{\delta}^1_n$ に対して, 次のゲーム G^A を考える.

I が α をプレイし, II が β をプレイしたとする. 次の条件のどちらかが成立するときに II の勝利と定義する.

1. ある $i \in \omega$ が存在して $(\alpha)_i \notin S$ または $(\beta)_i \notin S$ が成立し, そのような i で最小のものを i_0 とすると $(\alpha)_{i_0} \notin S$ が成立する.
2. 全ての $i \in \omega$ において $(\alpha)_i \in S$ かつ $(\beta)_i \notin S$ が成立し, $\sup_{i\in\omega}\{|(\alpha)_i|, |(\beta)_i|\} \in A$ が成立する.

U を次のように定義する.

$$A \in U \leftrightarrow A \subseteq \boldsymbol{\delta}^1_n \wedge \mathrm{II}\text{ は } G^A \text{ で必勝戦略を持つ}$$

U が $\boldsymbol{\delta}^1_n$ 上の $\boldsymbol{\delta}^1_n$-完備な超フィルターであることを示す.

$A \in U$ かつ $A \subseteq B$ ならば $B \in U$ であることは明らか.

$A \in U$ かつ $B \in U$ であるとき $A \cap B \in U$ であること：実数 α, β に対して $\alpha \oplus \beta$ を $(\alpha \oplus \beta)_{2n} = (\alpha)_n$ かつ $(\alpha \oplus \beta)_{2n+1} = (\beta)_n$ を満たす実数を表すことにする.

τ を G^A での II の必勝戦略, σ を G^B での II の必勝戦略とする. このとき II は $G^{A\cap B}$ において次のようにプレイする.

$$G^{A\cap B} \quad \begin{array}{cccccccc} \mathrm{I} & a_0 & & a_1 & & a_2 & & \alpha \\ & & \searrow \ \nearrow & & \searrow \ \nearrow & & \cdots\cdots & \\ \mathrm{II} & & b^\tau_0 & & b^\sigma_0 & & & \beta_\tau \oplus \beta_\sigma \end{array}$$

$$G^{A} \quad \begin{array}{cccccccc} \mathrm{I} & a_0 & & b^\sigma_0 & & a_1 & & \alpha \oplus \beta_\sigma \\ & & \searrow \ \nearrow & & \searrow \ \nearrow & & \cdots\cdots & \\ \mathrm{II} & & b^\tau_0 & & b^\tau_1 & & & \beta_\tau \end{array}$$

$$G^{B} \quad \begin{array}{cccccccc} \mathrm{I} & a_0 & & b^\tau_0 & & a_1 & & \alpha \oplus \beta_\tau \\ & & \searrow \ \nearrow & & \searrow \ \nearrow & & \cdots\cdots & \\ \mathrm{II} & & b^\sigma_0 & & b^\sigma_1 & & & \beta_\sigma \end{array}$$

II は $G^{A\cap B}$ をプレイするときに G^A と G^B でそれぞれの必勝戦略をプレイした手を使う. このとき τ と σ はそれぞれ必勝戦略より次が成立する.

$$\sup_{i\in\omega}\{|(\alpha)_i|, |(\beta_\tau \oplus \beta_\sigma)_i|\} = \sup_{i\in\omega}\{|(\alpha \oplus \beta_\sigma)_i|, |(\beta_\tau)_i|\} = \sup_{i\in\omega}\{|(\alpha \oplus \beta_\tau)_i|, |(\beta_\sigma)_i|\} \in A \cap B$$

よって以上から U はフィルターであることがわかる.

U が $\boldsymbol{\delta}^1_n$ の有界部分集合を含まないことと極大であることは明らか.

U が $\boldsymbol{\delta}^1_n$-完備であること：$\{A_\xi\}_{\xi<\eta<\boldsymbol{\delta}^1_n} \subseteq U$ を任意に取る. $\bigcap_{\xi<\eta} A_\xi \neq \emptyset$ であることを示せば十分である.

$\leq$ を $\mathbb{R}$ の長さ η の $\boldsymbol{\Delta}^1_n$-前整列順序とする. $f\colon \eta \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ を次のように定義する.

$$f(\xi) = \{\tau \mid \tau \text{ は II の } G^{A_\xi} \text{ での必勝戦略 }\}$$

コーディング補題より f の選択部分関数 g で $\mathrm{Code}(\mathrm{g},\leq)$ が $\mathbf{\Sigma}^1_n$ であるものを取る.

主張 1. 各 $m\in\omega$ において, 関数 $f_m\colon S^{m+1}\to S$ で任意の $\alpha^0,\dots,\alpha^m\in S$ と全ての $i\leq m$ において $(\alpha)_i=\alpha^i$ を満たす任意の α と任意の $\tau\in\bigcap_{\xi<\eta}g(\xi)$ に対して次が成立するものが存在する.

$$|f_m(\alpha^0,\dots,\alpha^m)|\geq|(\tau[\alpha])_m|$$

$\because$ $\alpha^0,\dots,\alpha^m\in S$ に対して整礎関係 $\prec_{\alpha^0,\dots,\alpha^m}$ を考える.

$$\langle\alpha_0,x_0,\tau_0,z_0\rangle\prec_{\alpha^0,\dots,\alpha^m}\langle\alpha_1,x_1,\tau_1,z_1\rangle$$

が成立するのは次の条件を満たすときである.

- $\alpha_0=\alpha_1$
- $x_0=x_1$
- $\tau_0=\tau_1$
- $\forall i\leq m((\alpha_0)_i=\alpha^i)$
- $(x_0,\tau_0)\in\mathrm{Code}(\mathrm{g},\leq)$
- $(z_0,z_1)\in W_{(\tau_0[\alpha])_m}$

$\prec_{\alpha^0,\dots,\alpha^m}$ は $\mathbf{\Sigma}^1_n$ で長さは $|(\tau[\alpha])_m|$ 以上である. f_m を $\prec_{\alpha^0,\dots,\alpha^m}$ の $\mathbf{\Sigma}^1_n$-*code* とすれば良い. この定義が関係として解析的に記述できるので十分大きなところで一様化すれば関数として定義できることに言及しておく. □

各 $m\in\omega$ に関して主張の関数を固定しておく. $\alpha^0\in S$ とし帰納的に $\alpha^{m+1}=f_m(\alpha^0,\dots,\alpha^m)$ と定義する. $\theta=\sup\{|\alpha^m|\mid m\in\omega\}$ とする. このとき $\xi<\eta$ を任意に取る. I は α を各 $m\in\omega$ において $(\alpha)_m=\alpha^m$ となるようにプレイし, II は $g(\xi)$ から必勝戦略を一つとりプレイする, その結果を β とする. このとき,

$$\sup_{i\in\omega}\{|(\alpha)_i|,|(\beta)_i|\}=\sup_{i\in\omega}\{|(\alpha)_i|\}=\theta\in A_\xi$$

となるので, $\theta\in\bigcap_{\xi<\eta}A_\xi\neq\emptyset$ が成立する.

以上より U は $\boldsymbol{\delta}^1_n$ 上の $\boldsymbol{\delta}^1_n$-完備な非単項超フィルターとなる. 従って $\boldsymbol{\delta}^1_n$ は可測基数である. □

射影的順序数に関して次のことがわかった.

定理 2.25 (Kechris-Kunen-Martin-Solovay)**.**

- $\boldsymbol{\delta}^1_n$ は全て基数.
- $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+2}=(\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1})^+$.
- $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}=\kappa^+_{2n+1}$. ただし κ_{2n+1} は共終数 ω の基数.
- $\boldsymbol{\delta}^1_n$ は全て正則.
- $\boldsymbol{\delta}^1_n$ は全て可測基数. □

例えば $\boldsymbol{\delta}^1_1=\omega_1$, $\boldsymbol{\delta}^1_2=\omega_2$, $\boldsymbol{\delta}^1_3=\aleph_{\omega+1}$, $\boldsymbol{\delta}^1_4=\aleph_{\omega+2}$ は全て可測基数となっている.

ZFC において可測基数は到達不能基数となり非常に大きくなるが, AD の下では小さい基数が巨大基数となることがわかる.

実は射影的順序数は可測基数であること以上に強い性質を持っていることがわかる. 今回は射影的順序数上に単に超フィルターが乗っていることを示したが, どのような超フィルターがいくつ乗っているかを正確に計算することでさらなる良い性質を導くことができる.

To Be Continued. . .

参考文献

[1] Kechris, Alexander S. On Projective Ordinals. J. Symbolic Logic 39 (1974), no. 2, 269–282.

[2] Kechris, Alexander S. On Projective Ordinals. J. Symbolic Logic 39 (1974), no. 2, 269–282.

[3] Jackson, S. (2011). AD and the projective ordinals. In A. Kechris, B. Löwe, & J. Steel (Eds.), Wadge Degrees and Projective Ordinals: The Cabal Seminar, Volume II (Lecture Notes in Logic, pp. 364-483). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781139028073.017

[4] Martin, D., and Steel, J. (1989). A Proof of Projective Determinacy. Journal of the American Mathematical Society, 2(1), 71-125. doi:10.2307/1990913

[5] Martin, D. Determinacy of Infinitely Long Games.