巨大基数と初等埋め込み

Yasuda Yasutomo

平成 30 年 12 月 22 日

今回は現代集合論の根幹をなす巨大基数 (*large cardinal*) を紹介し，また特に大きい巨大基数 (*'large' large cardinal*) が初等埋め込みによって特徴付けられることを見る．最後に ZFC での巨大基数の階層には上限があることを表す Kunen の結果を証明する．

1 予備知識

まずは集合と位相の一部復習として，集合論の基礎的な概念をこの章で紹介する．

definition 1.1.

- 集合 α が順序数であるとは α が推移的（$\Leftrightarrow \forall x \in \alpha, \forall y \in x (y \in \alpha)$）で $\langle \alpha, \in \rangle$ が整列順序をなすことをいう．
- $\alpha = \beta + 1 (= \beta \cup \{\beta\})$ の形の順序数を後続順序数，そうでない順序数で $\emptyset$ でないものを極限順序数という．
- 順序数全体のクラスを On で表す．

e.g. 1.

- $1 = \{\emptyset\}, 2 = \{0, \{\emptyset\}\}, \cdots, n+1 = n \cup \{n\} = \{0, 1, \cdots, n\}$，$\cdots$ は後続順序数である．
- $\omega = \{0,1,2,\}$ は極限順序数である．
- $\omega + \omega = \{0, 1, 2, \cdots, \omega, \omega+1, \omega+2, \cdots\}$ は極限順序数である．

definition 1.2.

- 集合 X との間に全単射が存在するような最小の順序数を $|X|$ と表す．また $|\alpha| = \alpha$ なる順序数を基数という．α 番目の無限基数を $\aleph_\alpha$ と書く．
- 基数 κ に対し，それより大きい最初の基数を κ^+ と書き，κ の後続基数という．
- α を極限順序数として，$\mathrm{cf}(\alpha) = \min\{|x| \mid x$ は α の非有界な部分集合 $\}$ を α の共終数といい，$\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$ なる無限基数を正則基数という．そうでない無限基数を特異基数という．

remark 1. 無限基数 κ に対して，κ が正則であることと，κ 未満の基数の κ 未満個の和では表せないこととが同値となる．基数の正則性は基数の大きさを保証している．逆に κ が特異基数であるときに，κ 未満の基数の κ 未満個の和で表せることにも注意する，

e.g. 2.

- ω は基数，$\omega+1$ は基数ではない，
- ω は正則基数，$\aleph_\omega$ は特異基数（$\mathrm{cf}(\aleph_\omega)=\omega$）.

definition 1.3 (累積階層)**.** 集合論の宇宙を次のように定める.

- $V_0=\emptyset$
- $V_{\alpha+1}=\mathcal{P}(V_\alpha)$
- $V_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}V_\beta$($\alpha$ は極限順序数）
- $V=\bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}}V_\alpha$

theorem 1.4 (Gödel の不完全性定理の系)**.** ZF や ZFC には，証明も反証もできない命題，すなわち独立命題が存在する．特に自身の無矛盾性を証明することはできない.

特定の論理式の集合を満たすクラスをそのモデルという．クラス X が ZF または ZFC のモデルであるとき，$X\models\mathrm{ZF}$，$X\models\mathrm{ZFC}$ と表す.

2 巨大基数

以下論理式の集合 T が無矛盾であることを Con(T) と表す．実は巨大基数の明確な定義はない．ここでは次のような定義としておく.

definition 2.1 (巨大基数の定義?)**.** κ が巨大基数であるとは $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}+\exists\kappa)$ が $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$ よりも真に強いときのことをいう.

e.g. 3. $V_\kappa\models\mathrm{ZFC}$ を満たす κ は巨大基数である.

今後の議論で必要になる概念を一つ定義する.

definition 2.2 (フィルター)**.**

- 空でない集合 S 上のフィルター F とは S の部分集合の族であって，次の条件を満たすものである.
  1. $S\in F,\emptyset\notin F$.
  2. $X\in F,Y\in F\to X\cap Y\in F$.
  3. $X,Y\subset S,X\in F,X\subset Y\to Y\in F$.
- 集合 S 上のフィルター F が単項フィルターであるとは $\exists X_0\subset S(F=\{X\mid X_0\subset X\})$ となるときのことをいう．今回はフィルターは全て非単項とする.
- 集合 S 上フィルターであって，包含に関して極大なものを S 上の超フィルターという.
- フィルター F が κ-完備であるとは $\forall X\subset F(|X|<\kappa\to\bigcap X\in F)$ を満たすときのことをいう.

remark 2. U が集合 S 上の超フィルターであるとき，すべての $X\subset S$ に対して，$X\in U$ または $S-X\in U$ が成立する.

巨大基数の例をいくつか紹介する.

definition 2.3 (到達不能基数)**.**

- κ が弱到達不能基数であるとは κ が非可算正則極限基数のことをいう．ただし κ が極限基数とは $\forall\lambda < \kappa(\lambda^+ < \kappa))$ を満たすときのことをいう．
- κ が到達不能基数であるとは κ が非可算正則強極限基数のことをいう．ただし κ が強極限基数とは $\forall\lambda < \kappa(2^\lambda < \kappa))$ を満たすときのことをいう．

theorem 2.4. 弱到達不能基数は巨大基数である．

Proof. 詳細はここでは述べないが，κ が弱到達不能基数であるとき，$\mathrm{L}_\kappa \models \mathrm{ZFC}$ となる． □

theorem 2.5. 到達不能基数は巨大基数である．

Proof. 同様に $V_\kappa \models \mathrm{ZFC}$ となる． □

ZFC の公理をそれぞれ満たすことを確かめれば良いので，到達不能基数の方は各自確かめてみると良い．

Proof. κ が到達不能基数のとき，同様に $V_\kappa \models \mathrm{ZFC}$ となる． □

definition 2.6 (可測基数)**.** κ が可測基数であるとは κ 上に κ-完備な超フィルターが存在するときのことをいう．

この巨大基数は名前から分かる通り，実数上の Lebesgue 測度の拡張を考えたいというモチベーションから考えられた基数である．集合論において非常に重要な役割を果たす基数である．

theorem 2.7. 可測基数は到達不能基数，つまり巨大基数．

Proof. κ を可測基数，U をそれ上の κ-完備な超フィルターとする．まず $\forall X \in U(|X| < \kappa)$ が成り立つ．これは U が κ-完備であることと，非単項 $(\forall\lambda < \kappa(\{\lambda\} \notin U))$ であることから従う．このことから κ が特異基数と仮定すると，κ が測度 0 集合の κ 未満個の和集合となり矛盾．ゆえに κ は正則基数．

以下，κ が強極限であることを示す．そうでないと仮定すると，ある $\lambda < \kappa$ が存在して，$\kappa \leqq 2^\lambda$ となる．$S = \{f_\alpha \colon \lambda \to 2 \mid \alpha < \kappa\}$ をとる．S 上の κ-完備な超フィルターを U とする．各 $\alpha < \kappa$ について，X_α を $\{f \in S \mid f(\alpha) = 0\}$，$\{f \in S \mid f(\alpha) = 1\}$ のうち，U に属する方とする．これは U が超フィルターであるから可能である．ϵ_α をそれに対応した 0 また 1 の値とする．U は κ-完備であるから，$X = \bigcap_{\alpha<\kappa} X_\alpha \in U$ となる．しかし X は $f(\alpha) = \epsilon_\alpha$ を満たすただ一つの元しか含まない．これは矛盾． □

definition 2.8. κ が強コンパクト基数であるとは任意の $\mathrm{L}_{\kappa\kappa}$-文の集合において，$\kappa$-充足可能ならば充足可能であるときのことをいう．

remark 3. この定義の詳細はここでは述べないがこの条件は次と同値となる．

1. κ が強コンパクト基数．
2. 任意の集合 S において，S 上の κ-完備なフィルターは κ-完備な超フィルターに拡張できる．

theorem 2.9. 強コンパクト基数は可測基数，つまり巨大基数

Proof. $\{X \subset \kappa \mid |\kappa - X| < \kappa\}$ が κ 上の κ-完備なフィルターであることと Remark から従う．(κ が正則であることも同様に従う．) □

いくつか巨大基数を紹介したが，まだまだたくさん巨大基数はある．ここではある巨大基数の存在から別の

巨大基数の存在が導けることを示した．実は巨大基数は直接の導出や相対無矛盾性からの帰結により階層をなすことが知られている．次の図 1 は ZFC における巨大基数の階層である．

3　初等埋め込み

ここでは初等埋め込みで特徴付けられる特に大きな巨大基数（*'large' large cardinal*）を考える．まずはモデル理論について軽く説明する．

definition 3.1.

- 言語 L とは，定数記号，関係記号（述語），関数記号の集合である．それぞれには引数が決まっている．
- 言語 L-構造とは，領域 M と言語 L を解釈する写像 F の組 $\mathcal{M} = \langle M, F \rangle$ のことである．

言語 L を固定して考える．L の記号に加えて，論理記号 $\vee$，$\wedge$，$\neg$，$\rightarrow$，$=$，$\exists$，$\forall$，可算無限個の変数からなる有限列を記号列と呼ぶ．記号列の中で特定の条件を満たすものを式や論理式と呼ぶ．

definition 3.2 (論理式)**.**

- 式とは次の条件を満たす記号列である．
  1. 各変数と L の定数は式である．
  2. n-変数関数記号 $f \in \mathrm{L}$ と式 $t_1, \ldots, t_n$ について $f(t_1, \ldots, t_n)$ も式である．
- 論理式とは次の条件を満たす記号列である．
  1. 式 $t_1, \ldots, t_n$ と述語 $R \in \mathrm{L}$ に対して，$(t_1 = t_2)$，$(R(t_1, \ldots, t_n))$ は論理式である．
  2. 論理式 ϕ，ψ について，$(\neg\phi)$，$(\phi \vee \psi)$，$(\phi \wedge \psi)$，$(\phi \rightarrow \psi)$ はいずれも論理式である．

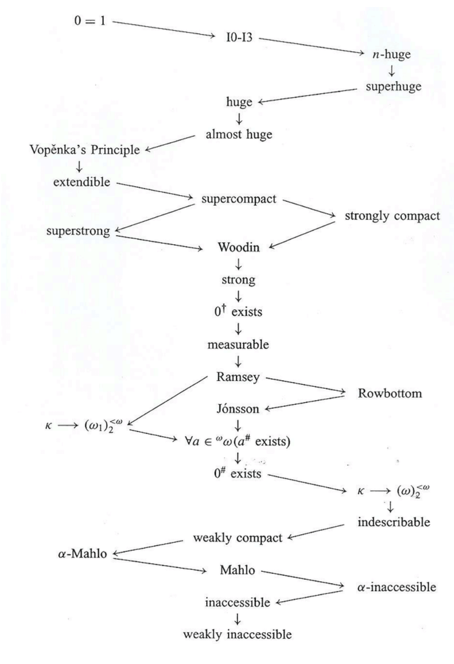

図 1　ZFC における巨大基数の階層

3. 論理式 ϕ と変数 x について，$(\exists x\phi)$，$(\forall x\phi)$ は論理式である．

remark 4. 量化子 ($\exists$，$\forall$）に束縛されていない変数を自由変数という．自由変数を含まない論理式を閉論理式という．

remark 5. 集合論において，言語 L は基本的に $\in$ のみである．この言語を $\mathrm{L}_\in$ と書き，この言語のモデルを $\in$-モデルという．

definition 3.3. 言語を L とする，$\mathcal{M} = \langle M, F\rangle$，$\mathcal{N} = \langle N, G\rangle$ を L-構造とする．二つの領域の間の単射 $j\colon M \to N$ が初等埋め込みであるとはすべての L-論理式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ と $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{M}$ について次が成立するときのことをいう．

- $\mathcal{M} \models \phi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \phi[j(a_1), \ldots, j(a_n)]$

remark 6.

- $j\colon M \to N$ が初等埋め込みであるときに,$j\colon M \prec N$ とかく．
- 「初等的」とは「一階論理の」という意味である．

definition 3.4. M が内部モデルであるとは M は ZF の推移的 $\in$-モデルであり，かつ $\mathrm{On} \subset M$ を満たすときという．

$\in$-モデルの間の初等埋め込みに関して次が成り立つ．

fact 1. M，N を内部モデルとし，$j\colon M \prec N$ とする．このとき，

1. すべての順序数 α について，$j(\alpha)$ は順序数かつ $\alpha \leqq j(\alpha)$
2. j は恒等写像ではなく，$N \subset M$ または $M \models \mathrm{AC}$ が成り立っているならば，ある順序数 δ が存在して $j(\delta) > \delta$ が成り立つ．

以下，初等埋め込みは恒等写像ではないものを考える．事実 1.2. においての δ は重要な役割を果たす．

definition 3.5. 初等埋め込み $j\colon M \prec N$ において，j の臨界点 $crit(j)$ とは順序数 δ で $j(\delta) > \delta$ を満たす最小のものをいう．

theorem 3.6 (可測基数の特徴付け)**.** 以下同値

1. 可測基数が存在する．
2. ある内部モデル M に対して，初等埋め込み j が存在して $j\colon V \prec M$ が成り立つ．

Proof. $(1 \to 2)$．今回は証明概略だけ述べる．κ を可測基数とする．U を κ 上の κ-完備な超フィルターとし，M を超ベキ $\mathrm{Ult}(V, U)$ の推移的崩壊とする．このとき M は内部モデルとなり，自然に初等埋め込み $j\colon V \prec M \simeq \mathrm{Ult}(V, U)$ が定まる．(さらに $crit(j) = \kappa$ となっている．)

$(2 \to 1)$．$\delta = crit(j)$ とする，ω 以下の順序数はすべて定義可能であり，j は初等埋め込みであるから，$\delta > \omega$ が成立する．U を次のように定義する：

$$X \in U \Leftrightarrow X \subset \delta \wedge \delta \in j(X)$$

U が δ-完備な超フィルターであることを示せば十分である．(定理 2.7. の議論で δ は正則，つまり基数

であることがわかる．）まず明らかに $\delta \in U$ である．またすべての $\alpha < \delta$ において，$j(\{\alpha\}) = \{\alpha\}$ より $\{\alpha\} \notin U$ が成り立つ．U が超フィルターであることは定義より明らか．δ-完備であることを示す．$\gamma < \delta$ において，$\chi\colon \gamma \to U$ とする．このとき U の定義より，$\delta \in \bigcap\{j(\chi(\alpha)) \mid \alpha < \delta\}$ が成り立つ．また，すべての $\alpha \leq \gamma$ において $j(\alpha) = \alpha$ が成り立つことから，$j(\chi)(\alpha) = j(\chi(\alpha))$ が成り立つ．よって $j(\bigcap\{\chi(\alpha) \mid \alpha < \gamma\}) = \bigcap\{j(\chi(\alpha)) \mid \alpha < \gamma\}$ が成り立つ．ゆえに，$\bigcap\{\chi(\alpha) \mid \alpha < \gamma\} \in U$．したがって U は δ-完備である． □

その他の巨大基数も初等埋め込みで特徴付けできることを紹介してこの章を終える．(証明はしない．)

theorem 3.7 ($0^\sharp$ の特徴付け)**.** 以下同値

1. $0^\sharp$ が存在する．
2. 構成可能宇宙 L から自身への初等埋め込み $j\colon L \prec L$ が存在する．

theorem 3.8 ($0^\dagger$ の特徴付け)**.** 以下同値

1. $0^\dagger$ が存在する．
2. ある無限基数 κ において，κ-モデルで臨界点が κ より大きい自身への初等埋め込みを持つものが存在する．

theorem 3.9 (超コンパクト基数の特徴付け)**.** 以下同値

1. κ が超コンパクト基数.
2. すべての $\lambda > \kappa$ において，ある $\alpha < \kappa$ と初等埋め込み $j\colon V_\alpha \prec V_\lambda$ で $crit(j) = \delta$ が $e(\delta) = \kappa$ を満たすものが存在する．

4 Kunen の結果

最後に巨大基数の初等埋め込みによる特徴付けの自然な拡張として V から V への初等埋め込み $j\colon V \prec V$ について考える．実はこれが図 1 の最上部にある $0 = 1$ であることを表す Kunen の結果をこの章では証明する．

theorem 4.1. 以下同値

1. $0 = 1$.
2. V から V への初等埋め込み $j\colon V \prec V$ が存在する．

正確には，

theorem 4.2 (*Kunen's inconsistent theorem*)**.** $j\colon V \prec M$ ならば $M \neq V$

これを示すために準備を少しする．

lemma 4.3. λ を $2^\lambda = \lambda^\omega$ を満たす無限基数とする．このときある $F\colon \lambda^\omega \to \lambda$ が存在して次を満たす．

$$\forall A \subset \lambda \text{s.t.} |A| = \lambda, \forall\gamma < \lambda \exists s \in A^\omega \text{s.t.} F(s) = \gamma \qquad (*)$$

Proof. $\{(A_\alpha, \gamma_\alpha) \mid \alpha < 2^\lambda\}$ を (A, γ) の数え上げとする $(\gamma < \lambda, A \subset \lambda, |A| = \lambda)$．$\alpha < 2^\lambda$ のとき，$\lambda^\omega = 2^\lambda > |\alpha|$ より，ある $s_\alpha \in A_\alpha^\omega$ が存在して，$s_\alpha \neq s_\beta \, (\beta < \alpha)$ を満たす．各 $\alpha < 2^\lambda$ において，$F(s_\alpha) = \gamma_\alpha$ と定義する．F が求める写像となる． □

Proof. $j\colon V \prec V$ が存在すると仮定する．$\kappa = \kappa_0 = crit(j)$ とおくと，これは可測基数である．$\kappa_n = j^n(\kappa_0)$ として，$\lambda = \lim_{n\to\infty} \kappa_n$ とする．このとき $j(\langle \kappa_n \mid n \in \omega \rangle) = \langle j(\kappa_n) \mid n \in \omega \rangle = \langle \kappa_{n+1} \mid n \in \omega \rangle$ より，$j(\lambda) = \lambda$ が成り立つ．$G = \{j(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$ とする．lemma 4.3. を用いて矛盾を導く．λ は可測基数の極限であるから，強極限基数である．また $\mathrm{cf}(\lambda) = \omega$ より，$2^\lambda = \lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)} = \lambda^\omega$ が成り立つ．lemma 4.3. より，ある $F\colon \lambda^\omega \to \lambda$ で任意の $A \subset \lambda \, (|A| = \lambda)$ において，$F\text{"}A^\omega = \lambda$ となるものが存在する．j が初等埋め込みであることと，$j(\omega) = \omega$，$j(\lambda) = \lambda$ から $j(F)$ は F と同様に $(*)$ が成り立つ．$A = G$ とすると，ある $s \in G^\omega$ が存在して，$(jF)(s) = \kappa$ を満たす．s は ω から G への関数であり，ある $t\colon \omega \to \lambda$ が存在して，$s = j(t)$ を満たす．しかし $\kappa = (jF)(jt) = j(F(t)) = j(\alpha)$ $(\alpha = F(t))$ となるが，これはすべての $\alpha < \kappa$ において，$j(\alpha) = \alpha$ かつ $j(\kappa) > \kappa$ が成立することを導き矛盾である． □

これは ZFC においての結果であり，ZF においては未解決である．

Question 1. ZF においても，$j\colon V \prec M$ ならば $M \neq V$ が成立するか？

巨大基数と初等埋め込みの関係をここまで見てきたが，巨大基数について今回紹介したことはほんの一部である．巨大基数が魅せる集合論の深淵はまだ続いている．

参考文献

[1] A. J. Kanamori, The Higher Infinite, Second Edition. Springer, 2009.

[2] K. Kunen 著，藤田博司訳．集合論 独立性証明への案内．日本評論社，2008.

[3] T. Jech, Set Thoery, The Third Millennium Edition, Revised and Expanded. Springer, 2002.

[4] 新井敏康，数学基礎論．岩波書店，2011.