Woodin 基数を含む標準内部モデルの構成

安田泰智

東京大学理学部数学科 3 年

数学基礎論若手の会 on Zoom

以下, ZFC で議論する.

Gödel の構成可能宇宙 L

定義

内部モデルとは真のクラスサイズの ZF のモデルのことである.

Gödel の構成可能宇宙 L

定義

内部モデルとは真のクラスサイズの ZF のモデルのことである.

集合 A と推移的な M に対して, 構造 $(M, \in, A \cap M)$ 上で定義可能な M の部分集合全体を $\mathrm{Def}_A(M)$ と書く.

定義

集合 A に対して, $\langle L_\alpha[A] \mid \alpha \in \mathrm{ON} \rangle$ を次のように定義する：

- $L_0[A] = \emptyset$,
- $L_{\alpha+1}[A] = \mathrm{Def}_A(L_\alpha[A])$,
- $L_\lambda[A] = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha[A]$, ただし λ は極限順序数.

さらに $L[A] = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{ON}} L_\alpha[A]$ と定義する.

Gödel の構成可能宇宙 L

Gödel の構成可能宇宙 L は特に $A = \emptyset$ とした場合である.

定義 (Gödel)

L-階層 $\langle L_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{ON} \rangle$ を次のように定義する：

- $L_0 = \emptyset$,
- $L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha)$,
- $L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$, ただし λ は極限順序数.

さらに $L = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{ON}} L_\alpha$ を構成可能宇宙という.

Gödel は L を調べて次を示した.

Gödel の構成可能宇宙 L

Gödel の構成可能宇宙 L は特に $A = \emptyset$ とした場合である.

定義 (Gödel)

L-階層 $\langle L_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{ON} \rangle$ を次のように定義する：

- $L_0 = \emptyset$,
- $L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha)$,
- $L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$, ただし λ は極限順序数.

さらに $L = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{ON}} L_\alpha$ を構成可能宇宙という.

Gödel は L を調べて次を示した.

定理 (Gödel)

1. L は ZF の最小の内部モデルである.
2. L は $\mathrm{ZFC} + \mathrm{GCH}$ を満たす.

Jensen の微細構造

- L-階層がどのように "育って" いくかを見るためには, 各 L_α 上の定義可能性を繊細に見る必要がある.

Jensen の微細構造

- L-階層がどのように "育って" いくかを見るためには, 各 L_α 上の定義可能性を繊細に見る必要がある.
- Jensen は L-階層より便利な J-階層 $\langle J_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{ON} \rangle$ を定義し, 微細構造 (fine structure) を導入した.

定義 (Jensen)

J-階層 $\langle J_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{ON} \rangle$ を次のように定義する：

- $J_0 = \emptyset$,
- $J_{\alpha+1} = \mathrm{rud}(J_\alpha \cup \{J_\alpha\})$,
- $J_\lambda = \bigcup_{\alpha \in \lambda} J_\alpha$, ただし λ は極限順序数.

ここで集合 U に対して, $\mathrm{rud}(U)$ は U の基本関数 (rudimentary function) による閉包を表す.

Jensen の微細構造

J-階層 $\langle J_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{ON} \rangle$ は次のような性質を持つ：

Jensen の微細構造

J-階層 $\langle J_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{ON} \rangle$ は次のような性質を持つ：

- J_α は推移的.
- $\omega\alpha = \alpha$ ならば $J_\alpha = L_\alpha$.
- M をある $X \prec_{\Sigma_1} J_\alpha$ の推移的崩壊とする．このときある $\beta \leq \alpha$ が存在して $M = J_\beta$.
- $\mathcal{P}(\kappa) \cap (J_{\alpha+1} \setminus J_\alpha) \neq \emptyset$ ならば $J_{\alpha+1} \models |\alpha| \leq \kappa$.

そして Jensen は微細構造を用いて L を解析し次を示した.

Jensen の微細構造

J-階層 $\langle J_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{ON} \rangle$ は次のような性質を持つ：

- J_α は推移的.
- $\omega\alpha = \alpha$ ならば $J_\alpha = L_\alpha$.
- M をある $X \prec_{\Sigma_1} J_\alpha$ の推移的崩壊とする．このときある $\beta \leq \alpha$ が存在して $M = J_\beta$.
- $\mathcal{P}(\kappa) \cap (J_{\alpha+1} \setminus J_\alpha) \neq \emptyset$ ならば $J_{\alpha+1} \models |\alpha| \leq \kappa$.

そして Jensen は微細構造を用いて L を解析し次を示した.

定理 (Jensen)

$V = L$ を仮定する．このとき任意の無限基数 κ において $\square_\kappa$ が成立する.

巨大基数

定義 (?)

巨大基数とは, ZFC にその存在を主張する公理 (巨大基数公理) を加えることによって無矛盾性が強くなるような基数のことをいう.

- 巨大基数公理は無矛盾性の強さによって (おおよそ) 線形な階層を成すことが知られている.
- 巨大基数公理は集合論の命題の無矛盾性の強さを計る "ものさし" の役割を果たしてくれる.

巨大基数

定義 (?)

巨大基数とは, ZFC にその存在を主張する公理 (巨大基数公理) を加えることによって無矛盾性が強くなるような基数のことをいう.

- 巨大基数公理は無矛盾性の強さによって (おおよそ) 線形な階層を成すことが知られている.
- 巨大基数公理は集合論の命題の無矛盾性の強さを計る “ものさし” の役割を果たしてくれる.

巨大基数の例

- 到達不能基数
- 弱コンパクト基数
- 可測基数
- Woodin 基数
- 超コンパクト基数 etc.

巨大基数の階層

$0 = 1$ → I0-I3 → 膨大基数 (huge)

↓

超コンパクト基数 (supercompact)

超強基数 (superstrong)　　強コンパクト基数 (strongly compact)

ウディン基数 (Woodin)　今回扱う

強基数 (strong)

大きな巨大基数

可測基数 (measurable)

ラムゼイ基数 (Ramsey)

$0^\sharp$ の存在

弱コンパクト基数 (weakly compact)

マーロ基数 (Mahlo)

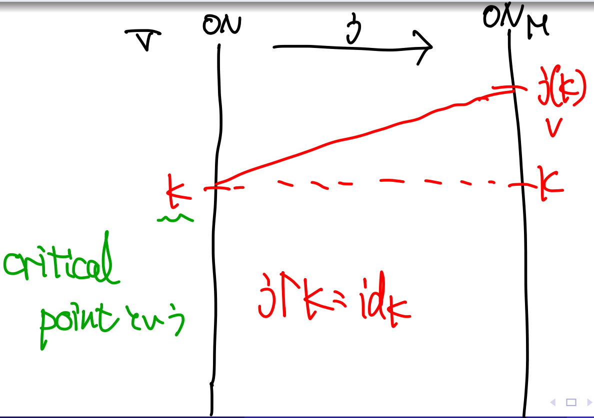
到達不能基数 (inaccessible)

L と巨大基数

しかし L は大きな巨大基数を含まない

定義

無限基数 κ が可測基数であるとは，推移的な M と非自明な初等埋め込み $j\colon V \prec M$ が存在して $\mathrm{crit}\,(j) = \kappa$ を満たすことをいう．



L と巨大基数

しかし L は大きな巨大基数を含まない

定義

無限基数 κ が可測基数であるとは, 推移的な M と非自明な初等埋め込み $j\colon V \prec M$ が存在して $\mathrm{crit}\,(j) = \kappa$ を満たすことをいう.

L と巨大基数

しかし L は大きな巨大基数を含まない

定義

無限基数 κ が可測基数であるとは, 推移的な M と非自明な初等埋め込み $j\colon V \prec M$ が存在して $\mathrm{crit}\,(j) = \kappa$ を満たすことをいう.

- 上のような初等埋め込み $j\colon V \prec M$ に対して,

$$U = \{X \subseteq \kappa \mid \kappa \in j(X)\}$$

  と定義すると U は κ 上の非単項 κ-完備超フィルターとなる.
- 逆に κ 上の非単項 κ-完備超フィルター U が与えられたとき, 超冪 $\mathrm{Ult}(V, U)$ と標準的な初等埋め込み $j_U\colon V \prec \mathrm{Ult}(V, U)$ を考えることで κ は可測基数であることがわかる.

L と巨大基数

しかし L は大きな巨大基数を含まない

定義

無限基数 κ が可測基数であるとは，推移的な M と非自明な初等埋め込み $j\colon V \prec M$ が存在して $\mathrm{crit}\,(j) = \kappa$ を満たすことをいう．

- 上のような初等埋め込み $j\colon V \prec M$ に対して，

$$U = \{X \subseteq \kappa \mid \kappa \in j(X)\}$$

  と定義すると U は κ 上の非単項 κ-完備超フィルターとなる．
- 逆に κ 上の非単項 κ-完備超フィルター U が与えられたとき，超冪 $\mathrm{Ult}(V, U)$ と標準的な初等埋め込み $j_U\colon V \prec \mathrm{Ult}(V, U)$ を考えることで κ は可測基数であることがわかる．

定理 (Scott)

可測基数が存在するならば，$V \neq L$.

L と巨大基数

Scott の定理の証明

$V = L$ と仮定して矛盾を導く．κ を最小の可測基数とする．

1. M を内部モデル, $j \colon V \prec M$ を非自明な初等埋め込みとする．
2. $M \subseteq L$ より $M = L = V$ が成立する．
3. 初等性より「$j(\kappa)$ は最小の可測基数」が M で成立する．
4. しかし κ は M で可測基数かつ $j(\kappa) > \kappa$ より最小性に反する．よって矛盾である．$\lightning$ $\square$

L と巨大基数

Scott の定理の証明

$V = L$ と仮定して矛盾を導く．κ を最小の可測基数とする．

1. M を内部モデル, $j\colon V \prec M$ を非自明な初等埋め込みとする．
2. $M \subseteq L$ より $M = L = V$ が成立する．
3. 初等性より「$j(\kappa)$ は最小の可測基数」が M で成立する．
4. しかし κ は M で可測基数かつ $j(\kappa) > \kappa$ より最小性に反する．よって矛盾である．$\lightning$ □

- Scott の定理は κ を可測基数としたとき, $\kappa \notin L$ を主張しているわけではない．実際 κ は L で弱コンパクト基数にはなっている．
- Scott の定理はより多くの巨大基数を含む L のようなモデルを構成するには超フィルターの情報を付加する必要があることを示唆している．

ここまでのまとめ

- Gödel は構成可能宇宙 L を定義し, L は $\mathrm{ZFC} + \mathrm{GCH}$ を満たすことを示した.
- Jensen は L の微細構造を導入して L を解析した.
- L は可測基数のような大きな巨大基数を含まない.

$\Rightarrow$ L のような微細構造を持ち, 可測基数のような巨大基数を含む内部モデルが作りたい

内部モデル理論

- L のような微細構造を持つ内部モデルを標準内部モデルという.
- 標準内部モデルを研究する集合論の分野を内部モデル理論と呼ぶ.

内部モデル理論

- L のような微細構造を持つ内部モデルを標準内部モデルという.
- 標準内部モデルを研究する集合論の分野を内部モデル理論と呼ぶ.

The Inner Model Program

任意の巨大基数公理 Ψ に対して, $\mathrm{ZFC} + \Psi$ を満たす標準内部モデルを構成せよ.

特に Ψ として "超コンパクト基数が存在する" が重要であるが, 未解決である.

内部モデル理論

- L のような微細構造を持つ内部モデルを標準内部モデルという.
- 標準内部モデルを研究する集合論の分野を内部モデル理論と呼ぶ.

The Inner Model Program

任意の巨大基数公理 Ψ に対して, $\mathrm{ZFC} + \Psi$ を満たす標準内部モデルを構成せよ.

特に Ψ として "超コンパクト基数が存在する" が重要であるが, 未解決である.

今回の発表

Ψ として "Woodin 基数が存在する" を考え, Mitchell–Steel[1] による $\mathrm{ZFC} + \Psi$ を満たす標準内部モデルの構成を紹介する.

巨大基数の階層

$0 = 1$

I0-I3

膨大基数 (huge)

構成したい。

超コンパクト基数 (supercompact)

超強基数 (superstrong)

強コンパクト基数 (strongly compact)

ウディン基数 (Woodin)

今回扱う。

強基数 (strong)

可測基数 (measurable)

ラムゼイ基数 (Ramsey)

$0^\sharp$ の存在

Lとcompatible

弱コンパクト基数 (weakly compact)

マーロ基数 (Mahlo)

到達不能基数 (inaccessible)

Woodin 基数

定義 (Woodin)

無限基数 δ が Woodin 基数であるとは, 任意の $f\colon \delta \to \delta$ に対して, 無限基数 $\kappa < \delta$ と初等埋め込み $j\colon V \prec M$ が存在して次を満たすことをいう：

- $\mathrm{crit}\,(j) = \kappa$,
- $f"\kappa \subseteq \kappa$,
- $V_{j(f)(\kappa)} \subseteq M$.

- Woodin 基数は到達不能基数であり, 可測基数の極限となっている.
- 可測基数が超フィルターの存在で特徴付けられたように, Woodin 基数はエクステンダーの存在によって特徴付けることができる.
- エクステンダーとは超フィルターの "coherent" なシステム $E = \langle E_a \mid a \in [\lambda]^{<\omega} \rangle$ のことである.

エクステンダー

$\kappa < \lambda \in \mathrm{ON}$ とする.
V 上の (κ, λ)-エクステンダー $E = \langle E_a \mid a \in [\lambda]^{<\omega} \rangle$ とは次の条件を満たすように定義を書き連ねたシステムである：

1. 各 E_a は $[\kappa]^{|a|}$ 上の κ-完備な超フィルター,
2. $a \subseteq b \in [\lambda]^{<\omega}$ のとき, 標準的な初等埋め込み

$$j_{a,b} \colon \mathrm{Ult}(V, E_a) \prec \mathrm{Ult}(V, E_b)$$

が存在する.

3. $(\langle \mathrm{Ult}(V, E_a) \mid a \in [\lambda]^{<\omega} \rangle, \langle j_{a,b} \mid a \subseteq b \in [\lambda]^{<\omega} \rangle)$ は順系をなし, 順極限を $\mathrm{Ult}(V, E)$ と表すと, $\mathrm{Ult}(V, E)$ は整礎となる.

この $\mathrm{Ult}(V, E)$ をエクステンダー E による超冪という.

標準内部モデルの構成：アイデアと問題点

アイデア

- L を構成するときに, エクスタンダーの情報も付加する.
- エクスタンダーの列 $\vec{E}$ をうまく選び, $L[\vec{E}]$ を考える.

標準内部モデルの構成：アイデアと問題点

アイデア

- L を構成するときに, エクステンダーの情報も付加する.
- エクステンダーの列 $\vec{E}$ をうまく選び, $L[\vec{E}]$ を考える.

問題点

- $L[\vec{E}]$ は Woodin 基数を含むのか?
- $L[\vec{E}]$ は微細構造を持っているのか？

標準内部モデルの構成：アイデアと問題点

アイデア

- L を構成するときに, エクステンダーの情報も付加する.
- エクステンダーの列 $\vec{E}$ をうまく選び, $L[\vec{E}]$ を考える.

問題点

- $L[\vec{E}]$ は Woodin 基数を含むのか?
- $L[\vec{E}]$ は微細構造を持っているのか？

反復可能性が重要となる

反復可能性とマウス

- ポテンシャルプレマウス $\mathcal{M}$ とは，“良い” エクステンダーの列
$$\vec{E} = \langle \vec{E}_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{dom}\,\vec{E} \rangle$$
と $\mathcal{M}$ 上のエクステンダー F が存在して
$$\mathcal{M} = (J_\alpha^{\vec{E}}, \in, \vec{E}, F)$$
と表せる構造 $\mathcal{M}$ のことをいう．
- さらに $\mathcal{M}$ がある微細構造に関する条件を満たすときプレマウスという．

ここで列 $\vec{E}$ には $\mathcal{M}$ 上のエクステンダーでないものも含まれている．

反復可能性とマウス

プレマウス $\mathcal{M}$ の反復可能性 (iterability) はゲームを用いて定義される.

$\alpha \in ON$, M: premouse　$G(M,\alpha)$: プレイヤー2人からなるαラウンドのゲーム

player: Suc, Lim　, 2人は反復木 (iteration tree) を作る。

$E_2 \in \quad M_2 = \mathrm{Ult}(M_0, E_1) \to M_4 \to \cdots \to M_{2n} \to \cdots \to M_\omega \quad (E_\omega \in M_\omega) \quad \cdots$

$M_0 = M \ni E_0 \quad M_1 = \mathrm{Ult}(M_0, E_0) \ni E_1 \to M_3 = \mathrm{Ult}(M_1, E_2) \to \cdots \to M_{2n+1} \to \cdots$

この構造をiteration treeという。

Limが勝ち $:\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall \xi < \alpha \ (M_\xi : \text{well-founded})$

M: α-反復可能 $:\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Limが$G(M,\alpha)$において必勝戦略をもつ

Iteration strategy

十分に反復可能なプレマウスをマウスという.

マウスの比較定理

マウスは比較できる

マウスの比較定理

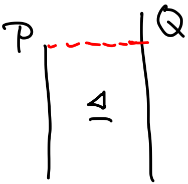
マウスは比較できる

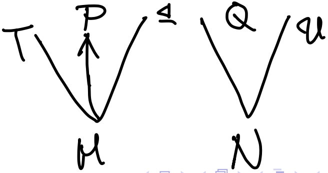
定理 (マウスの比較)

$\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ をマウスとする．このとき $\mathcal{M}$ の反復超冪 $\mathcal{P}$ と $\mathcal{N}$ の反復超冪 $\mathcal{Q}$ が存在して次のどちらかが成立する：

1. $\mathcal{P}$ は $\mathcal{Q}$ の始片かつ反復超冪による写像 $i\colon \mathcal{M} \to \mathcal{P}$ が存在する,
2. $\mathcal{Q}$ は $\mathcal{P}$ の始片かつ反復超冪による写像 $i\colon \mathcal{N} \to \mathcal{Q}$ が存在する．

- 複雑なマウスの比較をするためには線形な反復では不十分で，反復木を考える必要がある
- “十分な反復可能性” とはこの比較ができるくらいは課す．





標準内部モデルの構成：微細構造と反復可能性

- L の解析に微細構造を用いたが，L の構成には微細構造は必要なかった．
- Woodin 基数を含む標準内部モデルは構成から微細構造を用いる
- 微細構造を持つことの証明に反復可能性を用いる．
- さらに反復可能性の証明に微細構造を用いる．

$$\begin{tikzcd}
\text{微細構造} \arrow[r, bend left] & \text{反復可能性} \arrow[l, bend left]
\end{tikzcd}$$

標準内部モデルの構成：$L[\vec{E}]$-construction

今回紹介する標準内部モデルの構成は巨大基数の存在を仮定する.
巨大基数の存在を仮定しないような標準内部モデルの構成は
K^c-construction と呼ばれるが詳細は略する.

- Woodin 基数の存在を仮定する
- δ を $L(V_\delta) \models \delta$ は Woodin 基数となるような最小の順序数とする.
- V_δ 内で $\vec{E}$ を構成する.

帰納的にマウスの列 $(\mathcal{M}_\xi \mid \xi < \delta)$ を構成する.

定義

プレマウス $\mathcal{M}$ が reliable であるとは, 任意の $k \leq \omega$ に対して $\mathfrak{C}_k(\mathcal{M})$ が存在して “十分に反復可能” であることをいう.

ここで $\mathfrak{C}_k(\mathcal{M})$ とは微細構造を用いて定義された Skolem hull である.

標準内部モデルの構成：$L[\vec{E}]$-construction

- $\mathcal{M}_0 = (V_\omega, \in, \emptyset, \emptyset)$.

1. $F^{\mathcal{M}_\xi} = \emptyset$ かつ $\mathcal{M}_\xi$ 上の "良い" エクステンダー F' が存在して，$\mathcal{N}_{\xi+1} = (J_\alpha^{\vec{E}^{\mathcal{M}_\xi}}, \in, \vec{E}^{\mathcal{M}_\xi}, F')$ が 1-small かつ reliable のとき，$\mathcal{M}_{\xi+1} = \mathfrak{C}_\omega(\mathcal{N}_{\xi+1})$ と定義する．
2. 1 の場合でないとき $\mathcal{N}_{\xi+1} = (J_{\alpha+1}^{\vec{E}^{\mathcal{M}_\xi} \frown \langle F^{\mathcal{M}_\xi} \rangle}, \in, \vec{E}^{\mathcal{M}_\xi} \frown \langle F^{\mathcal{M}_\xi} \rangle, \emptyset)$ とする．$\mathcal{N}_{\xi+1}$ が reliable のとき，$\mathcal{M}_{\xi+1} = \mathfrak{C}_\omega(\mathcal{N}_{\xi+1})$ と定義する．

- λ が極限順序数のとき，$\eta = \liminf_{\xi \to \lambda} (\rho_\omega^+)^{\mathcal{M}_\xi}$ とする．各 $\beta < \eta$ に対して，$\mathcal{J}_\beta^{\mathcal{N}_\lambda} = \lim_{\xi \to \lambda} \mathcal{J}_\beta^{\mathcal{M}_\xi}$ と定める．$\mathcal{N}_\lambda$ が reliable のとき，$\mathcal{M}_\lambda = \mathfrak{C}_\omega(\mathcal{N}_\lambda)$ と定義する．

$(\mathcal{M}_\xi \mid \xi < \delta)$ が定義されたとき，各 $\beta < \delta$ に対して

$$\mathcal{J}_\beta^{\vec{E}} = \lim_{\xi \to \delta} \mathcal{J}_\beta^{\mathcal{M}_\xi}$$

と定義する．

標準内部モデルの構成：$L[\vec{E}]$-construction

- $\mathcal{N}_\xi$ の reliability は solidity と universality より $\mathfrak{C}_k(\mathcal{N}_\xi)$ の反復可能性に帰着される.
- $\mathfrak{C}_k(\mathcal{N}_\xi)$ の反復可能性は resurrection と Martin–Steel の定理 [6] を用いて証明される.

標準内部モデルの構成：$L[\vec{E}]$-construction

- $\mathcal{N}_\xi$ の reliability は solidity と universality より $\mathfrak{C}_k(\mathcal{N}_\xi)$ の反復可能性に帰着される.
- $\mathfrak{C}_k(\mathcal{N}_\xi)$ の反復可能性は resurrection と Martin–Steel の定理 [6] を用いて証明される.

このようにして構成された $\vec{E}$ は次を満たす.

定理 (Mitchell–Steel[1])

$L[\vec{E}] \models \mathrm{ZFC} + \mathrm{GCH} + \delta$ は Woodin 基数

- 構成よりこの $L[\vec{E}]$ は微細構造を持つ.
- $L[\vec{E}]$ は Woodin 基数を含む標準内部モデルとなっている
- 今回は Woodin 基数を 1 個含むような標準内部モデルの構成したが現在はより多くの Woodin 基数を含むような標準内部モデルが構成されている. 詳しくは [8] や [9] を参照すると良い.

Thank you for your attention !!

参考文献 I

[1] William J. Mitchell and John R. Steel. Fine Structure and Iteration Trees, volume 3 of Lecture Notes in Logic. Springer, Berlin, 1994.

[2] John R. Steel. An Outline of Inner Model Theory, in Handbook of Set Theory, volume 3.

[3] Martin Zeman. Inner Models and Large Cardinals, volume 5 of de Gruyter Series in Logic and Applications. de Gruyter, Berlin, 2002.

[4] Ronald B. Jensen. The fine structure of the constructible hierarchy, Anals of Mathematical Logic, 4:229–308, 1972.

[5] Ralf Schindler and Martin Zeman. Fine structure, in Handbook of Set Theory, volume 1.

[6] Donald A. Martin and John R. Steel. Iteration Trees, Journal of the American Mathematical Society 7(1):1-73, 1994.

参考文献 II

[7] Grigor Sargsyan. Descriptive inner model theory, The Bulletin of Symbolic Logic, 19(1), 1-55, 2013.

[8] John R. Steel. Inner models with many Woodin cardinals, Annals of Pure and Applied Logic, 65(2):185–209, 1993.

[9] Itay Neeman. Inner models in the region of a Woodin limit of Woodin cardinals, Annals of Pure and Applied Logic, 116:76–155, 2002.

[10] Akihiro Kanamori. The Higher Infinite, Large cardinals in set theiry from their beginnings, Second edition, Springer, 2003.

[11] Kenneth Kunen. Set theory, volume 34 of Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2011.